

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ЛИЧАК ОЛЕГ ВАСИЛЬОВИЧ

УДК 519.23/.25: 621.391

ДИСЕРТАЦІЯ

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ
ДЕФЕКТІВ МЕХАНІЗМІВ НА ПОЧАТКОВИХ СТАДІЯХ РОЗВИТКУ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

05 «Технічні науки»

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

 Личак О.В.

*Здобуваючі всієї примірників
дисертації засвідчую
Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради 082.02
Личак О.В.*



ТЕРНОПІЛЬ-2024

АНОТАЦІЯ

Личак О.В. Математичне моделювання нестационарних випадкових сигналів для виявлення дефектів механізмів на початкових стадіях розвитку. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Західноукраїнський національний університет, Міністерство освіти і науки України, Тернопіль, 2024.

Підготовка дисертаційної роботи здійснювалась у Фізико-механічному інституті ім. Г.В. Карпенка Національної академії наук України.

У **вступі** обґрунтована актуальність наукової проблеми, сформульовані мета та задачі досліджень, визначені об'єкт та предмет досліджень, відображені основні наукові результати, їх практичне значення та інші кваліфікаційні параметри, згідно чинного законодавства.

У **першому розділі** проаналізовано структури систем підтримки життєвого циклу механізмів (машин, систем) та показано важливість виявлення дефектів на ранній стадії їх розвитку. Раннє виявлення дефектів у системах ще до появи збоїв чи відмов дозволяє суттєво знизити імовірність аварій та є вкрай важливим інструментом для підтримки заданого рівня надійності їх функціонування, оптимізації планування робіт з ремонту та технічного обслуговування і продовження строку служби понад проектований. Проведено аналіз різних типів моделей систем, показано, що появу дефекту та його розвиток у системі можливо описати лише в рамках нелінійних моделей динамічних систем зі збуренням. Проведено короткий аналіз моделей та методів обробки діагностичних сигналів. Показано, що з огляду на складність структури діагностичних сигналів не існує загальних моделей діагностичних сигналів чи строго обґрунтованої методології їх аналізу. Показано, що незважаючи на значну різноманітність таких моделей сигналів та методів їх

обробки переважна більшість з них ґрунтується на певних евристичних моделях і припущеннях, що суттєво обмежує їх можливості. Найбільш близькими моделями для обробки діагностичних сигналів механізмів є моделі циклостаціонарних процесів та періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП).

У **другому розділі** проаналізовано математичні моделі нелінійних динамічних систем зі збуренням. Показано, що в рамках синергетичного підходу до аналізу нелінійних динамічних систем зі збуренням перехід системи до якісно нового стану (точка біфуркації системи) супроводжується коливаннями у системі, котрі є складною взаємодією коливних, квазіколивних та чисто випадкових складових і має ознаки нестационарності та стохастичності. Тобто, зародження нових прихованих сутностей (у тому числі дефектів) в нелінійній динамічній системі має хаотичну природу, що супроводжується виникненням прихованих періодичних (у тому числі) коливань. Частоти цих коливань не завжди відповідають власним частотам системи, хоча й можуть співпадати з ними. Ці коливання також не є наслідком відомого явища стохастичного резонансу. Спектр коливань, що виникають у нелінійній динамічній системі унаслідок біфуркації може бути вузькосмуговим, широкосмуговим, лінійчатим, з складними взаємними амплітудними та фазовими модуляціями. При цьому частоти ліній можуть бути кратними з цілими та/або дробовими множниками і містити комбінаційні частоти між різними компонентами, що проявляються при діагностиці системи як періодично нестационарний випадковий сигнал (ПНВС). Встановлено, що ранню стадію розвитку дефекту у динамічній нелінійній системі зі збуренням не можна вважати станом чи подією згідно з існуючими стандартними означеннями. Означено, що такий дефект є періодично нестационарним випадковим процесом (ПНВП).

Третій розділ присвячений дослідженню оцінок періоду періодично нестационарного випадкового сигналу (ПНВС), що розглядається як перший крок при вирішенні проблеми пошуку прихованих періодичностей. Виконано

порівняльний аналіз когерентного та компонентного методів кореляційного аналізу сигналу при невідомому періоді нестационарності. Розглянуто модель прихованих періодичностей для ПНВС. Показано, що періодичність у ПНВС може проявлятися або лише в імовірнісних характеристиках першого порядку, тобто в характеристиках регулярної складової коливаль, або лише у характеристиках другого порядку, які описують флуктуаційні коливання, або в характеристиках як регулярної, так і стохастичної складових. Тому відповідно мусить бути сформована задача їх виявлення. Виконано порівняльний аналіз ПНВС-методів виявлення прихованих періодичностей, отримано формули для величин зміщення та дисперсії оцінки визначення періоду. Показано, що оцінка зміщення має порядок малості $O(N^{-2})$, а оцінка дисперсії має порядок малості $O(N^{-3})$. Проведено дослідження оцінювання функції математичного сподівання та її коефіцієнтів Фур'є при невідомому періоді нестационарності, отримано формули для зміщення та дисперсії оцінок функції математичного сподівання та її коефіцієнтів Фур'є. Показано, що оцінка зміщення функції математичного сподівання має порядок малості $O(N^{-1})$, а оцінка дисперсії має порядок малості $O(N^{-2})$. Показано, що оцінка зміщення коефіцієнтів Фур'є функції математичного сподівання має порядок малості $O(N^{-1})$, а оцінка їх дисперсії має порядок малості $O(N^{-2})$. Проведено дослідження оцінювання кореляційної функції та кореляційних компонентів за відомої величини періоду нестационарності. Показано, що оцінка зміщення кореляційної функції має порядок малості $O(N^{-1})$, а оцінка дисперсії має порядок малості $O(N^{-3})$; оцінка зміщення кореляційних компонентів має порядок малості $O(N^{-1})$, а оцінка їх дисперсії має порядок малості $O(N^{-2})$. Встановлено, що до періодичної нестационарності другого порядку (прихованої періодичності) призводять взаємні кореляції між модулюючими процесами.

Четвертий розділ присвячений методам виявлення періодичної нестационарності сигналів у частотній області. Розглянуто властивості спектральних характеристик ПНВС для встановлення частотної області, в якій відбуваються періодичні зміни миттєвої спектральної густини сигналу. Показано, що частотний діапазон, в якому миттєва спектральна густина ПНВС змінюється за часом, визначається косинусними перетвореннями від косинусних і синусних кореляційних компонентів. Сформовано компонентні статистики для визначення частотного діапазону та частоти таких змін (базової частоти ПНВС). Проаналізовано збіжність компонентних статистик, отримано вирази для величин зміщення та дисперсії оцінок. Досліджено властивості оцінок базової частоти ПНВС, отримано залежності для зміщення та дисперсії компонентних оцінок базової частоти. Показано, що зміщення оцінки, яка знаходиться за статистикою косинусної складової, залежить від нульового і косинусних кореляційних компонентів, а за статистикою синусної складової – від синусних кореляційних компонентів. Обидва зміщення мають порядок $O(\theta^{-2})$. Показано, що дисперсії оцінок базової частоти ПНВС є обернено пропорційними до квадрату номера вибраної для оцінювання гармоніки, а також квадрату математичного сподівання того функціоналу, за екстремальними значеннями якого знаходиться оцінка частоти. Виконано аналіз дискретних компонентних оцінок базової частоти ПНВС. Показано, що дискретизація за зсувом у загальному випадку приводить до накладання, коли на значення спектральних компонентів на заданій частоті накладаються ті значення, які зсунуті відносно неї на частоти, кратні частоті дискретизації. Сформульовано вимоги до частоти дискретизації для відсутності такого накладання. Отримано формули для зміщення та дисперсії дискретних оцінок базової частоти за умови відсутності накладання.

У **п'ятому розділі** розроблена модель ПНВС на основі перетворення Гільберта та аналітичного сигналу. Представлено мультиплікативну модель діагностичного сигналу. Показано, що структура вібраційного діагностичного

сигналу є складнішою, ніж добуток широкосмугового стохастичного сигналу від дефекту та низькочастотного регулярного сигналу несучої частоти.

Розглянуто модель ПНВС з широкосмуговою високочастотною модуляцією несучої та проведено її теоретичний аналіз. Доведено ряд теорем щодо автокореляційних функцій такого сигналу та його перетворення Гільберта а також їх взаємно кореляційних функцій. Показано, що аналітичний сигнал, побудований з необробленого сигналу та його перетворення Гільберта є комплекснозначним періодично корельованим процесом, дисперсія аналітичного сигналу дорівнює сумі дисперсій сигналу та його перетворення Гільберта. Математичне сподівання суми квадратів сигналу та його перетворення Гільберта (так званий “квадрат огинаючої”) дорівнює подвоєній дисперсії сигналу, амплітуда гармонік якого визначається амплітудою квадрата функції, що описує низькочастотну регулярну несучу. Це означає, що амплітуда кожної з гармонік дисперсії визначається добутками всіх несучих гармонік з різними номерами. Показано, що періодична у часі дисперсія присутня на фоні стаціонарного процесу з потужністю, що пропорційна усередненій за часом потужності регулярної складової. Отже, ця величина є сумою двох однакових ПКВП і не є квадратом огинаючої у його звичайному розумінні. Аналіз цієї величини не дає жодних нових результатів у порівнянні з аналізом вихідного сигналу. Такий аналіз не може бути виконаний з використанням перетворенням Фур’є, оскільки результати його застосування для аналізу реалізації випадкових процесів не є слухними.

Розглянуто модель ПНВС з вузькосмуговою високочастотною модуляцією несучої та проведено її теоретичний аналіз. Доведено, що компоненти вищих порядків такого сигналу є стаціонарними випадковими процесами, отримано формули для їх автокореляційних функцій. Також доведено, що ці компоненти є взаємними ПНВС, отримано формули для їхніх взаємокореляційних функцій. Показано, що функції взаємної кореляції періодично змінюються в часі, для компонентів з різними номерами порядків несучої. Саме ці кореляції утворюють періодичні компоненти кореляційної функції сигналу. Показано, що

квадратури модулюючого процесу можна розділити за допомогою перетворення Гільберта компонент вищих порядків. Доведено, що аналітичний сигнал для вузькосмугового випадку модуляції сигналу, “огинача” і квадрат “огиначаючої” є ПКВП.

Розглянуто модель ПНВС з високочастотною амплітудно-фазовою модуляцією несучої та проведено її теоретичний аналіз. Детально досліджено випадок сигналу з амплітудно-фазовою вузькосмуговою гармонійною модуляцією несучої представленої квадратурною моделлю. Показано, що авто і взаємкореляційна функції квадратур є парами перетворення Гільберта. Доведено, що авто- та взаємкореляційні функції квадратур сигналу і перетворення Гільберта його квадратур однакові, а їхні їх взаємно кореляційні функції відрізняються лише знаком. Доведено, що аналітичний сигнал у цьому випадку є ПНВС і виведено формули для його кореляційних компонент. Показано, що амплітуда дисперсії другої гармоніки такого ПНВС завжди менша за величину дисперсії стаціонарного фону. Доведено, що вузькосмугові компоненти такого ПНВС, центральні частоти яких відрізняються на подвійну величину несучої є стаціонарними випадковими процесами, при цьому вони є взаємно ПНВС, а сума їх взаємкореляційних функцій визначає другу гармоніку кореляційної функції сигналу.

Досліджено випадок широкосмугової високочастотної амплітудно-фазової модуляції багатоконпонентного сигналу. Отримано представлення для взаємкореляційних функцій сигналу та його перетворення Гільберта. Показано, що автокореляційні функції сигналу і його перетворення Гільберта однакові, їхні взаємкореляційні функції відрізняються лише знаком, а нульові взаємкореляційні компоненти є непарними функціями часової затримки. Показано, що при фільтрації сигналу фільтром з прямокутною передаточною функцією не лише зменшується потужність стаціонарного фону, а також зменшуються величини амплітуд гармонік дисперсії, якщо корельовані компоненти спектру сигналу не потрапляють в смугу пропускання фільтра.

Розглянуто вузькосмугову модуляцію багатокomпонентного сигналу, представляючи кожен модулюючий процес формулами Райса. Доведено теорему про умови взаємостационарності компонентів такого ПНВС. Також доведена стационарність та взаємна періодична нестационарність високочастотних компонент багатокomпонентного високочастотного широкосмугово модульованого ПНВС та виведено формули для взаємкореляційних функцій компонент.

Проведено симуляцію широкосмугового високочастотного модульованого ПНВС та порівняння отриманих оцінок кореляційних компонент з теоретично заданими, що показали добру відповідність. Отримані оцінки кореляційних та взаємкореляційних компонент симульованого ряду підтвердили попередньо отримані теоретичні твердження про те, що відмінностями між величинами кореляційних компонентів для сигналу та його перетворення Гільберта можна знехтувати. Проведено фільтрацію сигналу для виділення окремих високочастотних компонент та виконано кореляційний аналіз цих компонент у відповідності до запропонованої методики. Проведено демодуляцію квадратур модулюючих сигналів і розраховано їх авто- та взаємкореляційні функції, що також підтвердило слушність оцінок та правильність вибраної моделі ПНВС. Побудовано матрицю кореляцій на основі результатів обробки для симульованого сигналу з використанням запропонованої моделі ПНВС.

У **шостому розділі** наведено результати обробки реальних діагностичних сигналів з використанням запропонованої моделі ПНВС. Наведено структурну схему ПНВС-аналізу реальних часових послідовностей.

Наведено результати обробки та аналізу сигналу віброприскорення підшипникового вузла декантера Flottweg 24E. Наведено оцінки кореляційної функції сигналу, процес визначення базових частот регулярної та стохастичної складових з використанням МНК-функціоналу, розділення регулярної та стохастичної складових сигналу, амплітудні спектри регулярної складової та дисперсії. Досліджено структуру взаємних кореляцій модулюючих складових на основі аналізу 19 спектральних компонент, побудовано матрицю кореляцій

розмірами (19x19) та її матрицю нормалізованих коефіцієнтів кореляцій. Запропоновано індикатор нестационарності сигналу як оцінку ступеня розвитку дефекту. Показано, що кореляційні зв'язки між спектральними компонентами з різними частотами зникають залежно від різниці між номерами їх порядків. Показано, що вибір смуги обробки ПНВС слід проводити на основі величини нормованого коефіцієнта кореляції між спектральними компонентами, що знаходяться на протилежних краях смуги пропускання. Проведено обробку цього ж сигналу методом “квадрату огинаючої” визначаючи “інформативну смугу частот” на основі спектрального ексцесу. Показано, що отримані методом “квадрату огинаючої” оцінки суттєво залежать від розміру реалізації сигналу, отже не є слухними.

Наведено результати застосування моделі ПНВС для аналізу експериментальних даних, отриманих у Case Western Reserve University, що використовуються у якості неформальної бази сигналів для тестування методик обробки сигналів вібродіагностування. Виконано детальний аналіз сигналів для підшипника кочення з дефектами розміром 0,18 мм і 0,36 мм на зовнішньому кільці. Визначено базові частоти сигналу, розділено регулярну та стохастичну складові, отримано оцінки кореляційних функцій та кореляційних компонент вищих порядків. Визначено величини індикаторів нестационарності за різних величин дефекту, що дозволяють оцінювати ступінь розвитку дефекту. Показано, що усереднена за часом потужність стохастичної складової зростає зі зростанням несправності, отже, можна врахувати цей приріст як другий індикатор розвитку дефекту, котрий демонструє вищу чутливість до зміни розміру дефекту елемента підшипника. Також наведено результати обробки сигналів, котрі класифікуються в базі Case Western Reserve University як такі, для яких сучасні методи обробки не дозволяють виявити сигнатури дефектів. Показано, що застосування запропонованих у роботі моделі і методики обробки даних дозволяє виявити у цих сигналах ознаки дефектів і розрахувати величини відповідних індикаторів.

Наведено результати застосування моделі ПНВС для раннього виявлення дефекту (тріщини) у матеріалі Д16Т шляхом аналізу оптичного спекл- сигналу зображень поверхні зразка при статичному навантаженні. Показано ефективність запропонованої моделі та методики обробки діагностичного ПНВС сигналу для системи з статичним навантаженням. Наведено карти кореляцій у просторі сигналу та визначено на основі цих даних величину індикатора нестационарності за різної величини навантаження зразка. Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів на основі стандартного методу оцінювання тріщиностійкості матеріалу. Показано можливість виявлення та оцінювання ступеня розвитку дефекту за величини навантаження вдвічі меншої ніж передбачено стандартом. Продемонстровано високу чутливість індикаторів ступеня розвитку дефекту та відношення сигнал/шум більше 10 при визначенні кореляційних складових вищих порядків.

У **висновках** сформульовано основні результати проведених досліджень.

У **додатках** наведено список публікацій здобувача, схеми зміни індексів сумування, інтегрування при оцінюванні потужності сигналів у смугах, виведення формул для визначення взаємкореляційних функцій складових сигналів і їх квадратур та акти впровадження результатів роботи.

Ключові слова: періодично нестационарний випадковий сигнал, перетворення Гільберта, моделювання, аналітичний сигнал, кореляційний аналіз, вібрація, дефекти, діагностика, фільтрація.

ABSTRACT

Lychak O.V. Mathematical modeling of the non-stationary random signals for detecting defects in mechanisms at the initial stages of their development. – Qualifying research paper in the form of a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences in the specialty 01.05.02 – Mathematical modeling and computational methods. – West Ukrainian National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Ternopil, 2024.

This research was performed at the Karpenko Physico-mechanical institute of the National Academy of Sciences of Ukraine.

The introduction substantiates the relevance of the scientific problem, formulates the goal and objectives of the research, defines the object and subject of the research, reflects the main scientific results, their practical significance and other qualification parameters, in accordance with current legislation.

Chapter 1 dedicated to analyze the structure of systems the life cycle support of mechanisms (machines, systems) and explains the importance of detecting defects at an early stage of their development. Early detection of defects in systems before faults or failures can significantly reduce the probability of accidents and is an extremely important tool for maintaining a given level of reliability of their operation, optimizing the planning of repair and maintenance work, and extending the service life beyond the designed one. An analysis of various types of system models is carried out. It is shown that the appearance of a defect and its growth the system can be described only within the framework of nonlinear models of dynamic systems with perturbations. A brief analysis of models and methods for processing diagnostic signals is carried out. It is shown, that there are no general models of diagnostic signals or a strictly justified methodology for their analysis given the complexity of the structure of diagnostic signals. It is shown, that despite the significant variety of such signal models and methods for their processing, the most of them are based on certain heuristic models and assumptions, which significantly limits their capabilities.

The closest models for processing of such complex diagnostic signals from mechanisms are models of cyclostationary processes and periodically correlated random processes (PCRP).

In **Chapter 2** the mathematical models of nonlinear dynamic systems with perturbations were analyzed. It is shown that within the framework of the synergetic approach to the analysis of nonlinear dynamic systems with perturbations, the point to transition of the system to a qualitatively new state (the bifurcation point of the system) is accompanied by oscillations in the system. They are a result of the complex interaction of oscillatory, quasi-oscillatory and purely random components and have features of non-stationarity and stochasticity. That is, the appearing of new hidden entities (including defects) in a nonlinear dynamic system has a chaotic nature, which is accompanied by the appearing of hidden, in that, periodic oscillations. The frequencies of these oscillations do not always correspond to the eigen frequencies of the system, although they may coincide with them. These oscillations are also not a consequence of the well-known phenomenon of stochastic resonance. The spectrum of such oscillations arising in a nonlinear dynamic system due to bifurcation can be narrowband, broadband, comb-like, with complex mutual amplitude and phase modulations, while the frequencies of the comb lines can be multiples of integer and/or fractional factors as well as contain combination frequencies between different components. They develop themselves in the diagnostics of the system as a periodically nonstationary random signal (PNRS). It is established that the early stage of defect development in a dynamic nonlinear system with a disturbance cannot be considered a fault or failure according to existing standard definitions. It is determined that such a defect is a periodically nonstationary random process (PNRP).

Chapter 3 is dedicated to the study of estimation of the period of a periodically nonstationary random signal (PNRS). It is considered as the first step in solving the problem of finding hidden periodicities. A comparative analysis of coherent and component methods of correlation analysis of a signal with an unknown period of nonstationarity is performed. The PNRS model of hidden periodicities is considered.

It is shown that periodicity in PNRS can develop itself either only in the probabilistic characteristics of the first order, that is, in the characteristics of the regular component of oscillations, or only in the characteristics of the second order, which describe fluctuating oscillations, as well as in the characteristics of both the regular and stochastic components. Therefore, the problem of their detection must be formulated accordingly to situation. A comparative analysis of PNRS methods for detecting hidden periodicities is performed. Formulas for the values of the bias and variance of the estimate of determining the period are obtained. It is shown that the bias estimate has vanishing order of magnitude $O(N^{-2})$ and the variance estimate has vanishing order of magnitude $O(N^{-3})$. A study on the estimation of the mathematical expectation function and its Fourier coefficients with an unknown period of nonstationarity was performed. Formulas for the bias and variance of the estimates of the mathematical expectation function and its Fourier coefficients were obtained. It was shown, that the estimate of the bias of the mathematical expectation function has vanishing order of magnitude $O(N^{-1})$ and the estimate of the dispersion has vanishing order of magnitude $O(N^{-2})$. It was shown that the estimate of the bias of the Fourier coefficients of the mathematical expectation function has vanishing order of magnitude $O(N^{-1})$ and the estimate of the dispersion has vanishing order of magnitude $O(N^{-2})$. A study on the estimation of the covariation function and covariation components with a known value of the period of nonstationarity was performed. It was shown that the estimation of the bias of the covariation function has vanishing order of magnitude $O(N^{-1})$ and the estimation of the variation value has vanishing order of magnitude $O(N^{-3})$; the estimate of the bias of the covariation components has vanishing order of magnitude $O(N^{-1})$ and the estimate of the variation has vanishing order of magnitude $O(N^{-2})$. It was established that cross

correlations between modulating processes lead to periodic nonstationarity of the second order (hidden periodicity).

A **Chapter 4** is dedicated to methods for detecting of the periodic nonstationarity of signals in the frequency domain. The properties of the spectral characteristics of the PNRS are considered to establish the frequency domain, in which periodic changes in the instantaneous spectral density of the signal occur. It is shown that the frequency range, in which the instantaneous spectral density of the PNRS varies in time is determined by cosine transformations from the cosine and sine covariation components. Component statistics to determine the appropriate frequency range and frequency of such changes (the basic frequency of the PNRS) are proposed. The analysis of the convergence of component statistics was performed; expressions for the magnitudes of the bias and variance of the estimates were obtained. The properties of the estimates of the basic frequency of the PNRS were investigated; dependencies for the bias and variance of the component estimates of the basic frequency were obtained. It was shown that the bias of the estimate, which is calculated with the statistics of the cosine component, depends on the zero and cosine correlation components, if calculated with the statistics of the sine component - on the sine correlation components. Both values of bias has vanishing order of magnitude $O(N^{-2})$. It is shown that the variances of the estimates of the fundamental frequency of the PNRS are inversely proportional to the square of the number of the harmonic, selected for estimation, as well as to the square of the mathematical expectation of the functional at whose extreme values of the frequency estimate is found. An analysis of the discrete component estimates of the basic frequency of the PNRS is performed. It is shown that discretization by lag in the general case leads to overlapping of frequencies, when the values of the spectral components at a given frequency are superimposed on those values that are shifted relative to it by frequencies that are multiples of the sampling frequency. Requirements for the lag sampling frequency to avoid such overlap are formulated.

Formulas for the offset and variance of discrete estimates of the basic frequency under the condition of no overlap are obtained.

In the **Chapter 5**, a model of the PNRS based on the Hilbert transform and the analytical signal is developed. A multiplicative model of the diagnostic signal is presented. It is shown that the structure of the vibration diagnostic signal is more complex than the product of a broadband stochastic signal from a defect and a low-frequency regular signal of the carrier frequency. The model of PNRS with broadband high-frequency carrier modulation is considered and its theoretical analysis is carried out. A number of theorems regarding the auto covariation functions of such a signal and its Hilbert transform, as well as their cross covariation functions are proved. It is shown that the analytical signal, constructed from the raw signal and its Hilbert transform are a complex-valued periodically correlated process (PCRP). A variation of the analytical signal is equal to the sum of the variations of the signal and its Hilbert transform. The mathematical expectation of the sum of the squares of the signal and its Hilbert transform (the so-called “squared envelope”) is equal to twice the variation of the signal, the amplitude of the harmonics of which is determined by the amplitude of the square of the function describing the low-frequency regular carrier signal. This means that the amplitude of each of the variation harmonics is determined by the products of all carrier harmonics with different numbers. It is shown that a time-periodic variation function is present in the background of a stationary process with a power proportional to the time-averaged power of the regular component. Therefore, this quantity is the sum of two identical PCRPs and is not the square of the envelope in its usual sense. The analysis of this quantity does not give any new results if compared to the analysis of the raw signal. Such an analysis cannot be performed using the Fourier transform, since the results of its application to the random processes are not consistent. The model of the PNRS with narrowband high-frequency carrier modulation is considered and its theoretical analysis is carried out. It is proved, that the higher-order components of such a signal are stationary random processes; formulas for their autocovariation functions are obtained. It is also proved that these components are jointly PNRS, formulas for their

cross-covariation functions are obtained. It is shown that the cross-covariation functions change periodically in time for components with different carrier order numbers. Just these correlations that form the periodic components of the signal covariation function. It is shown that the quadratures of the modulating process can be separated using the Hilbert transform of the higher-order components. It is proved that the analytical signal for the narrowband case of signal modulation, the “envelope” and the square of the “envelope” are PCRPs.

The PNRS model with high-frequency amplitude-phase modulation of the carrier signal is considered and its theoretical analysis is carried out. The case of a signal with amplitude-phase narrowband harmonic modulation of the carrier represented by a quadrature model is studied in detail. It is shown that the auto and cross-covariation functions of the quadratures are pairs of Hilbert transforms. It is proved that the auto- and cross-covariation functions of the quadratures of the signal and the Hilbert transform of its quadratures are the same, and their cross-covariation functions differ only in sign. It is proved that the analytical signal in this case is a PNRS and formulas for its covariation components are derived. It is shown that the amplitude of the variation of the second harmonic of such a PNRS is always less than the value of the variation of the stationary background. It is proven that the narrowband components of such a PNRS, the central frequencies of which differ by twice the carrier value, are stationary random processes, while they are jointly PNRS and the sum of their cross-covariation functions determines the second harmonic of the signal covariation function.

The case of broadband high-frequency amplitude-phase modulation of a multicomponent signal is investigated. A representation is obtained for the cross-covariation functions of the signal and its Hilbert transform. It is shown that the auto covariation functions of the signal and its Hilbert transform are the same, their cross-covariation functions differ only in sign, and the zero cross-covariation components are odd functions of the time lag. It is shown, that when filtering a signal with a filter with a rectangular transfer function, not only the power of the stationary background

decreases, but also the amplitudes of the variation harmonics can decrease if the correlated components of the signal spectrum do not included into the filter passband.

Narrowband modulation of a multicomponent signal is considered, representing each modulating process by Rice's equations. A theorem on the conditions of joint stationarity of the components of such a PNRS is proved. The stationarity and joint periodic non-stationarity of the high-frequency components of a multicomponent high-frequency broadband-modulated PNRS are also proved and formulas for the cross-covariation functions of the components are derived.

A simulation of a broadband high-frequency modulated PNRS was carried out and the estimates of the covariation components were compared with the theoretically given ones, which showed a good coincidence. The obtained estimates of the covariation and cross-covariation components of the simulated series confirmed the previously obtained theoretical statements that the differences between the values of the covariation components for the signal and its Hilbert transform can be neglected. The signal was filtered to extract individual high-frequency components, and a correlation analysis of these components was performed in accordance with the proposed method. The quadratures of the modulating signals were demodulated and their auto- and cross-covariation functions were calculated. This confirmed the validity of the estimates and the correctness of the developed PNRS model. A matrix of covariations was constructed based on the results of processing for the simulated signal using the proposed PNRS model.

A **Chapter 6** presents the results of processing real diagnostic signals using the proposed PNRS model. The structural diagram of PNRS analysis of a diagnostic signal is presented.

The results of processing and analysis of the vibration acceleration signal of the Flottweg 24E decanter bearing assembly are presented. The estimations of the signal covariation function, the process of determining the base frequencies of the regular and stochastic components using the LSM functional, the separation of the regular and stochastic components of the signal, the amplitude spectra of the regular component and the variation are presented. The structure of cross-covariation s of the

modulating components is studied based on the analysis of 19 spectral components, a matrix (19x19) of covariations and a matrix of correlation coefficients are constructed. The indicator of signal nonstationarity is determined as an assessment of the degree of defect development. It is shown that correlations between spectral components with different frequencies are dumping depending on the difference between their order numbers. It is shown that the selection of the PNRS processing band should be based on the value of the normalized correlation coefficient between spectral components located at opposite boundaries of the passband. The same signal was processed using the “square envelope” method, determining the “informative frequency band” based on spectral kurtosis. It was shown that the estimates obtained using the “square envelope” method significantly depend on the size of the signal realization, and therefore are not consistent.

The results of the application of the PNRS model to the analysis of experimental data, obtained by Case Western Reserve University, which are used as an informal signal database for testing methods for processing vibration diagnostics signals, are presented. A detailed analysis of signals for a rolling bearing with defects of 0.18 mm and 0.36 mm in size on the outer ring is performed. The basic signal frequencies are determined, the regular and stochastic components are separated, and estimates of correlation functions and higher-order correlation components are obtained. The values of nonstationarity indicators for different defect sizes are determined, and the possibility of assessing the degree of defect development is shown. It is shown that since the time-averaged power of the stochastic component increases with the increase of defect size, this increase can be taken into account as a second indicator of defect development, demonstrating a higher sensitivity to changes in the size of the bearing element defect. The results of signal processing, which are classified in the database as those in which the best modern processing methods do not allow detecting defect signatures, are also presented. It is shown that the application of the proposed model and processing method allows to detect signatures of defects in these signals and to calculate the values of the corresponding indicators.

The results of the application of the PNRS model for early detection of a defect (crack) in the D16T material by analyzing the optical speckle-images signal of sample surface under static loading are presented. The effectiveness of the proposed PNRS model and the diagnostic signal processing method for a system with static loading is shown. Correlation maps in the signal domain are presented and the value of the non-stationarity indicator for different sample loading values is determined, based on these data. A comparative analysis of the obtained results is carried out based on the standard method for assessing the crack resistance of the material. The possibility of detecting and assessing the degree of defect (crack) development at a load value twice less than that provided by the standard is shown. The high sensitivity of the indicators of the degree of defect development and the high (10) signal-to-noise ratio when determining the higher-order correlation components are demonstrated.

In **Conclusions** the main results of the research are explained.

The **Appendices** contain schemes for changing the summation indices, integration equation when estimating the signal power in the narrow bands, derivation of formulas for determining the cross-covariation functions of the component signals and their quadratures, implementation documents, and a list of scientific publications and presentations, related to the research.

Keywords: periodically nonstationary random signal, Hilbert transform, modeling, analytical signal, correlation analysis, vibration, defects, diagnostics, filtration.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці які відображають основні наукові результати дисертації.

Статті у журналах, що входять

до наукометричних баз даних Scopus/Web of Science:

1. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Matsko I. Hilbert transform for covariance analysis of periodically nonstationary random signals with high-frequency modulation. *ISA Transactions*, 144, 452–481, 2024.

<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2023.10.025> (SJR Q1, Scopus)

2. Javorskyj I., Matsko I., Yuzefovych R., Lychak O., Lys R. Methods of Hidden Periodicity Discovering for Gearbox Fault Detection. *Sensors*, 2021, 21, 6138.

<https://doi.org/10.3390/s21186138> (SJR Q1, Scopus)

3. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Trokhym G., Varyvoda M. Methods of periodically non-stationary random processes for vibrations monitoring of rolling bearing with damaged outer race. *Digital Signal Processing: A Review Journal*, 145, 2024, 104343.

<https://doi.org/10.1016/j.dsp.2023.104343> (SJR Q2, Scopus)

4. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Slyepko R., Semenov P. Detection of distributed and localized faults in rotating machines using periodically non-stationary covariance analysis of vibrations. *Measurement Science and Technology*, 2023, 34, 065102.

<https://doi.org/10.1088/1361-6501/acbc93> (SJR Q2, Scopus)

5. Lychak O., Holyns'kiy I. Evaluation of random errors in Williams' series coefficients obtained with digital image correlation. *Measurement Science and Technology*, 2016, 27(3), 035203.

<https://doi.org/10.1088/0957-0233/27/3/035203> (SJR Q2, Scopus)

6. Lychak O., Holyns'kiy I. Improving the accuracy of derivation of the Williams' series parameters under mixed (I+II) mode loading by compensation of measurement bias in the stress field components data. *Measurement Science and Technology*, 2016, 27(12), 125203.

<https://doi.org/10.1088/0957-0233/27/12/125203> (SJR Q2, Scopus)

7. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Varyvoda M. Vibration analysis of the damaged bearing unit of the port crane lifting mechanism. *Materials Science*, 2024, 59(4), 395 – 404.

<https://doi.org/10.1007/s11003-024-00790-x> (SJR Q3, Scopus)

8. Sakharuk O., Muravs'kyi L., Holyns'kiy I., Lychak O. Determination of the field of local displacements by the digital speckle correlation method with adaptive segmentation of the images. *Materials Science*, 2014, 49(5), 660–666.

<https://doi.org/10.1007/s11003-014-9660-4> (SJR Q3, Scopus)

9. Lychak O., Holyns'kyi I. Estimation of the accuracy of determination of the Williams coefficients under the conditions of normal cleavage. *Materials Science*, 2013, 48(5), 664–670.

<https://doi.org/10.1007/s11003-013-9552-z> (SJR Q3, Scopus)

10. Voronyak T., Kmet A., Lychak O. Single-step phase-shifting speckle interferometry. *Materials Science*, 2007, 43(4), 554–567.

<https://doi.org/10.1007/s11003-013-9552-z> (SJR Q3, Scopus)

Статті у наукових фахових виданнях України:

11. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P. Methods and means of early vibration diagnostics of rotating components of mechanisms of quay container handlers. *The Paton Welding Journal*, 2022, 01, 48–58.

<https://doi.org/10.37434/tpwj2022.01.09>

12. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Trokhym G., Varyvoda M., Semenov P. Diagnostics of gear pair damage using the methods of biperiodically correlated random processes. Part 2. Investigation of vibration signals of the wind power generator gearbox. *The Paton Welding Journal*, 2023, 4, 45–53.

<https://doi.org/10.37434/tpwj2023.04.06>

13. Lychak O., Holyns'kyi I. Evaluation of stress field reconstruction errors near the crack tip of body under plain strain conditions. *Information extraction and processing*, 2014, 41(117), 63–69.

14. Яворський І., Юзефович Р., Личак О. Перетворення Гільберта багатокomпонентних періодично нестационарних випадкових сигналів. Доповіді Національної академії наук України, 2022, 1, 20–33.

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.01.020>

15. Яворський І., Юзефович Р., Личак О. Аналіз високочастотної модуляції несучих гармонік періодично нестационарного випадкового сигналу. Доповіді Національної академії наук України, 2022, 2, 21–31.

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.02.021>

16. Яворський І., Юзефович Р., Личак О. Стохастичні моделі прихованих періодичностей та ефективні методи їх виявлення. Доповіді Національної академії наук України, 2023, 6, 19–32.

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.06.019>

17. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Слєпко Р., Варивода М., Семенов П. Діагностика пошкоджень зубчатих пар методами біперіодично корельованих випадкових процесів. Частина 1. Теоретичні аспекти проблеми. Технічна діагностика та неруйнівний контроль, 2022, 4, 4–11.

<https://doi.org/10.37434/tdnk2022.04.01>

18. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Трохим Г., Варивода М., Семенов П. Діагностика пошкоджень зубчатих пар методами біперіодично корельованих випадкових процесів. Частина 2. Дослідження вібраційних сигналів редуктора вітрогенератора. Технічна діагностика та неруйнівний контроль, 2023, 1, 13–21. <https://doi.org/10.37434/tdnk2023.01.02>

19. Юзефович Р., Яворський Р., Личак О., Гнатишин В., Варивода М. Виділення та аналіз детермінованої складової вібрацій методом найменших квадратів. Технічна діагностика та неруйнівний контроль, 2023, 2, 17–21.

<https://doi.org/10.37434/tdnk2023.02.02>

20. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Комарницький Б., Хміль Р., Смірнова О. Дослідження кореляційної структури вібраційного сигналу підшипникових вузлів декантера. Технічна діагностика та неруйнівний контроль, 2024, 2, 3–10. <https://doi.org/10.37434/tdnk2024.02.01>

21. Юзефович Р., Яворський І., Мацько І., Личак О., Трохим Г., Дзерин О., Стецько І. Пристрої для виявлення дефектів на ранніх стадіях їх зародження при визначенні технічного стану механізмів. Технічна діагностика та неруйнівний контроль, 2020, 4, 8–16.

<https://doi.org/10.37434/tdnk2020.04.02>

22. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Варивода М., Стецько І. Методи та засоби ранньої вібродіагностики підшипникових вузлів обертових механізмів. Технічна діагностика та неруйнівний контроль, 2021, 2, 30–37.

<https://doi.org/10.37434/tdnk2021.02.04>

23. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Семенов П. Методи та засоби ранньої вібродіагностики обертових вузлів механізмів причальних контейнерних перевантажувачів. Технічна діагностика та неруйнівний контроль, 2021, 4, 25–34. <https://doi.org/10.37434/tdnk2021.04.03>

24. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Trokhym G., Varyvoda M. Stochastic model of the gearbox pair vibration. Information extraction and processing, 2021, 49 (125), 26–31. <https://doi.org/10.15407/vidbir2021.49.026>

25. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Слєпко Р., Варивода М. Демодуляція нестационарного випадкового сигналу з використанням перетворення Гільберта. Відбір і обробка інформації, 2022, 50 (126), 26–33.

<https://doi.org/10.15407/vidbir2022.50.026>

26. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Комарницький Б. Переваги моделі періодичного нестационарного випадкового процесу при обробці вібраційного сигналу. Відбір і обробка інформації, 2023, 51(127), 23–31.

<https://doi.org/10.15407/vidbir2023.51.023>

27. Личак О., Глова З., Кметь А. Спектральні перетворення сигналів в різницевому спекл-інтерферометрі Ліндерця. Відбір і обробка інформації, 2004, 21 (97), 74–79.

28. Личак О., Глова З., Кметь А. Порівняльний аналіз методів виділення корисного сигналу в фазозсувних спекл-інтерферометрах. Відбір і обробка інформації, 2006, 25(101), 91–98.

29. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Khmil R. The covariance analysis of the periodically non-stationary random signal with narrow-band modulation of carrier harmonics. *Information Extraction and Processing*, 2024, 52(128), 19–26.

<https://doi.org/10.15407/vidbir2024.52.019>

Патенти:

30. Личак О.В. Спосіб виявлення місць розміщення дефектів у матеріалі або місць руйнування матеріалу чи елемента конструкції при навантаженні (варіанти). Патент України на 20 років № 114116, опубл. 25.04.2017, бюл. № 8/2017.

31. Личак О.В. Спосіб виявлення місць розміщення дефектів у матеріалі або місць руйнування матеріалу чи елемента конструкції за механічного навантаження чи іншого виду руйнування матеріалу (варіанти). Патент України на 20 років № 121586, опубліковано 25.06.2020, бюл. № 12/2020.

32. Личак О.В. Спосіб підвищення точності визначення коефіцієнтів розкладу поля механічних напружень в околі вершини тріщини у степеневі ряди Вільямса. Патент України на корисну модель № 92126, опубліковано 11.08.2014, бюл. № 15/2014.

33. Личак О.В. Спосіб виявлення та визначення положення вершини наскрізної тріщини у матеріалі або конструкції. Патент України на корисну модель № 98606, опубліковано 27.04.2015, бюл. № 8/2015.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

34. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Matsko I., Semenov P. Evaluation of the mechanism damage using model of vibration signal as a periodically correlated random process. *Procedia Structural Integrity*, 2022, 36, 122–129.

<https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.01.013> (Scopus)

35. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Kurapov P. Hilbert Transform for Analysis of Daily Changes of the Earth Magnetic Field // 2021 IEEE XII International Conference on Electronics and Information Technologies (ELIT). P. 181–185. <https://doi.org/10.1109/ELIT53502.2021.9501150> (Scopus)

36. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P. Hilbert Transform of Multicomponent Narrow-band Periodically Non-stationary Random Signal // Proceedings of XI International Conference on Advanced Computer Information Technologies, Deggendorf, Germany, ACIT–2021. P. 57–60.

<https://doi.org/10.1109/ACIT52158.2021.9548456> (Scopus)

37. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Trokhym G., Semenov P. Bi-periodically correlated random processes as a model for gear pair vibration // First International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied Problems (ITTAP–2021), November 16-18, 2021, Ternopil, Ukraine. CEUR Workshop Proceeding, 2021, 3039, P. 47–54. (Scopus)

38. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Sliepko R., Semenov P. Hilbert transform for analysis of amplitude modulated wide-band random signals // Proceedings of XII International Conference on Advanced Computer Information Technologies, Spišská Kapitula, Slovakia, 26-28 September 2022. P. 68–71. Electronic ISSN: 2770-5226. Print ISSN: 2770-5218.

<https://doi.org/10.1109/ACIT54803.2022.9913131> (Scopus)

39. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Sliepko R., Varyvoda M. Hilbert transform of periodically non-stationary random signals: narrow-band high frequency amplitude modulation // Proceedings of 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology, Kharkiv, Ukraine, 3–7 October 2022. P. 273–277.

<https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916452> (Scopus)

40. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Sliepko R., Romanyshyn Yu. Model for analysis of high-frequency modulated random signals // Proceedings of 13th International Conference on Advanced Computer Information Technologies, Wrocław, Poland, 21-23 September 2023. P. 96–99.

<https://doi.org/10.1109/ACIT58437.2023.10275456> (Scopus)

41. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Varyvoda M. Analysis of the periodically non-stationary structure for modulated vibration signal // 2023 IEEE 13th International Conference on Electronics and Information Technologies (ELIT), September 26-28, 2023. P. 252–256.

<https://doi.org/10.1109/ELIT61488.2023.10310718> (Scopus)

42. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Semenov P. Method of periodically non-stationary random signals demodulation with Hilbert transform // 3rd International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied Problems (ITTAP-2023), November 22-24, 2023, Ternopil, Ukraine and Opole, Poland. CEUR Workshop Proceeding, 2023. 3628, P. 548–553. (Scopus)

43. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Sliepko R. Demodulation of the simulated periodically non-stationary random signal with Hilbert transform // CEUR Workshop Proceedings, 2nd International Workshop on Computer Information Technologies in Industry 4.0, CITI 2024, 12–14 June 2024, Ternopil, Ukraine, 3742, P. 127–136. (Scopus)

44. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Torba Yu., Sbrodov Ye., Komarnytskyi B. Correlation matrix for analysis of the covariance and spectral structures of PNRP // Proceedings of 14th International Conference on Advanced Computer Information Technologies, Ceske Budejovice, Czech Republic, 19-21 September 2024. P. 158–161.

<https://doi.org/10.1109/ACIT62333.2024.10712471> (Scopus)

45. Javorskyj I., Torba Yu., Yuzefovych R., Sbrodov Ye., Lychak O. Periodically non-stationary properties of vibrations for gas-turbine engine with unbalanced rotor // VII International conference “Welding and related technologies”, 7–10 October 2024, Yaremche, Ukraine: Abstracts of plenary and poster papers. Kyiv, International Association “Welding”. P. 17.

46. Трохим Г.Р., Юзефович Р.М., Личак О.В., Варивода М.З., Бойко М.В., Лисенко О.М. Діагностування підшипників кочення методами ПКВП. *Праці XX Міжнародної науково-технічної конференції “Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта”*. Київ : Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2019. С. 167–168.

47. Яворський І.М. Застосування кореляційного аналізу вібраційних сигналів для дослідження трибокорозії / І.М. Яворський, Р.Т. Слєпко, Р.М. Юзефович, О.В. Личак // *Праці XX Міжнародної науково-технічної конференції*

“Приладобудування: стан і перспективи”. Київ : Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2021. С. 155–156.

48. Юзефович Р.М. Розроблення систем вібраційної діагностики обертових механізмів з використанням методів теорії періодично нестационарних випадкових процесів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, І.Г. Стецько // *Збірка тез чотирнадцятої міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ІРТК-2021)*. Київ: Національний авіаційний університет, 2021. С. 228–229.

49. Встановлення технічного стану обладнання з використанням вібродіагностичних систем відбору та обробки вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, І.Г. Стецько, М.З. Варивода // *Праці ХХ Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2021. С. 146–147.

50. Система відбору вібраційних сигналів для діагностики обертових механізмів / Р.М. Юзефович, І.Г. Стецько, І.М. Яворський, О.В. Личак // *Збірка тез доповідей другої міжнародної конференції “Неруйнівний контроль та моніторинг технічного стану”*. Одеса, 2021. С. 43–44.

51. Юзефович Р.М. Підходи до побудови систем вібродіагностики / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, П.О. Семенов, О.В. Личак, І.Г. Стецько // *Збірка тез доповідей другої міжнародної конференції “Неруйнівний контроль та моніторинг технічного стану”*. Одеса, 2021. С. 44.

52. Дослідження спектральних властивостей вібраційного сигналу від елемента механізму з тріщиною / Р.М. Юзефович, І.М. Мацько, О.В. Личак, Г.Р. Трохим, І.М. Яворський // *Праці ХХІ Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2022. С. 191–193.

53. Юзефович Р.М. Дослідження технічного стану механізмів з використанням методів періодично корельованих випадкових процесів / Р.М. Юзефович, О.В. Личак, П.Р. Курапов, М.З. Варивода, І.М. Яворський // *Праці XXI Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2022. С. 196–198.

54. Дослідження процесів трибокорозії поверхні тіл обертання із застосуванням кореляційного аналізу вібраційних сигналів / О.В. Личак, Р.Т. Слепко, І.М. Яворський, Р.М. Юзефович // *Праці XXI Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2022. С. 200–201.

55. Сучасні методи вібраційної діагностики обертових механізмів ґрунтовані на теорії періодично корельованих випадкових процесів / Р.М. Юзефович, О.В. Личак, І.М. Яворський, І.Г. Стецько // *Збірка тез п’ятнадцятої міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ІПРТК-2022)*. Київ: Національний авіаційний університет, 2022. С. 202–203.

56. Обробка вібраційних сигналів методами періодичних нестационарних випадкових процесів для виявлення дефектів підшипників / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, О.В. Личак, Г.Р. Трохим, І.М. Мацько // *Збірка тез міжнародної науково-практичної конференції “Міцність і довговічність сучасних матеріалів та конструкцій”* присвячена 70-ти річчю з дня народження член-кореспондента НАН України, проф. П. Яснія. Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2022. С. 219–221.

57. Діагностування механізмів на основі аналізу вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, О.В. Личак, І.М. Яворський, І.Г. Стецько, І.Я. Стецько // *Збірка тез міжнародної науково-практичної конференції “міцність і довговічність сучасних матеріалів та конструкцій”* присвячена 70-ти річчю з дня

народження член-кореспондента НАН України, проф. П. Яснія. Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2022. С. 222–223

58. Модель стохастичної модуляції вібраційних сигналів для виявлення дефектів підшипників / Г. Трохим, О. Личак, Р. Юзефович, І. Яворський, Р. Слєпко // *Збірка тез міжнародної науково-практичної конференції “міцність і довговічність сучасних матеріалів та конструкцій”* присвячена 70-ти річчю з дня народження член-кореспондента НАН України, проф. П. Яснія. Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2022. С. 224–225.

59. Застосування вібродіагностичних систем відбору та обробки вібраційних сигналів для визначення технічного стану промислового обладнання / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, Р.Т. Слєпко, О.В. Личак, І.Г. Стецько, М.З. Варивода, Г.Р. Трохим // *Збірка тез конференції “Зварювання та технічна діагностика для відновлення економіки України”*. Київ: Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України, 2022. С. 22.

60. Періодично корельовані випадкові процеси як модель циклічних навантажень у механізмах та конструкціях / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, М.З. Варивода, Р.Т. Слєпко // *Праці XXII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2023. С. 222–223.

61. Дослідження обертових механізмів без спеціальних фундаментів методами періодично корельованих випадкових процесів / Р. Юзефович, І. Яворський, О. Личак, В. Симоненко, Р. Слєпко // *Праці XXII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2023. С. 262–263.

62. Застосування нестационарного підходу до аналізу вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, І.Й. Мацько // *Збірка*

тез шістнадцятої міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ІРТК-2023). Київ: Національний авіаційний університет, 2023. С. 302–304.

63. Застосування методів періодично корельованих випадкових процесів для аналізу вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, І.Й. Мацько, П.О. Семенов // *Матеріали 16-й міжнародного симпозіуму українських інженерів-механіків у Львові*. Львів: Національний Університет “Львівська Політехніка”, 2023. С. 124–125.

64. Аналіз вібраційних сигналів від тонкої пластини з тріщиною / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, О.В. Личак, І.Й. Мацько // *Матеріали XIII міжнародної науково-практичної конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем”*. Національний університет “Чернігівська політехніка”, 2023. Т. 1. С. 236.

65. Імовірнісна модель вібраційних сигналів у вигляді періодичного нестационарного випадкового процесу / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, Р.Т. Слєпко, П.О. Семенов // *Збірник тез доповідей III Міжнародної науково-технічної конференції “Перспективи розвитку машинобудування та транспорту”*, 1-3 червня 2023 року. Вінниця: Вінницький національний технічний університет, 2023. С. 301–302.

66. Дослідження технічного стану авіаційних двигунів методами періодично нестационарних випадкових процесів / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, Ю.І. Торба, О.В. Личак, Є.В. Сбродов // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 236–237.

67. Триканальний портативний пристрій для відбору та обробки вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, І.Г. Стецько, О.В. Личак, І.Я. Стецько, М.З. Варивода // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ:

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 238–239.

68. Метадані при відборі та дослідженні вібраційних сигналів / Г.Р. Трохим, О.В. Личак, Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, В.С. Янішевський // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 244–245.

69. Дослідження структури вібраційних сигналів методами ПКВП у підшипниках підданих наводненню / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, Б.Р. Комарницький, О.В. Личак, Р.Т. Слепко // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 253–254.

70. Дослідження поширення вібрації в транспортній колісній машині / Г.Т. Черчик, О.В. Личак, Г.Р. Трохим, Р.М. Юзефович, І.М. Яворський // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 257.

71. Побудова сучасних систем вібраційної діагностики складних механізмів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, Б.Р. Комарницький, О.В. Личак // *Збірка тез сімнадцятої Міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ПРТК–2024)*. Київ: Національний авіаційний університет, 2024. С. 436–437.

72. Діагностування дефектів у механізмах портових кранів / І.М. Яворський, П.О. Семенов, Р.М. Юзефович, О.В. Личак // *Збірка тез сімнадцятої Міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ПРТК–2024)*. Київ: Національний авіаційний університет, 2024. С. 438–439.

73. Вібраційна діагностика обертових вузлів машинних комплексів / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, Б.Р. Комарницький, О.В. Личак, І.Й. Мацько //

Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем”. Чернігів: Національний університет “Чернігівська політехніка”, 2024. С. 240.

74. Спосіб пониження вібраційного навантаження на опори конструкцій / Г.Т. Черчик, І.М. Яворський, О.В. Личак, Р.Т. Слєпко, Р.М. Юзефович // *Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем”*. Чернігів: Національний університет “Чернігівська політехніка”, 2024. С. 241.

75. Переваги вібраційних методів діагностики механізмів порталних кранів / П.О. Семенов, І.М. Яворський, О.В. Личак, Р.М. Юзефович, Б.Р. Комарницький // *Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем”*. Чернігів: Національний університет “Чернігівська політехніка”, 2024. С. 242.

76. Спеціалізовані системи для задач вібраційної діагностики обертових механізмів / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, О.В. Личак, І.Й. Мацько, Г.Р. Трохим, І.Г. Стецько // *Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції “Перспективи розвитку озброєння та військової техніки сухопутних військ”*. Львів: Національна академія сухопутних військ імені Гетьмана Петра Сагайдачного, 2024. С. 407–408.

77. Model of the diagnostic signals in the form of bi-periodically non-stationary random process /R.M. Yuzefovych, I.M. Javorskyj, O.V. Lychak, M.Z. Varyvoda // *Матеріали міжнародної наукової конференції “Математика та інформаційні технології”*, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28-30 вересня 2023 року. Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2023. С. 131–132.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	36
ВСТУП	37
РОЗДІЛ 1. ДІАГНОСТИКА ТА ДІАГНОСТИЧНІ СИГНАЛИ ПРИ АНАЛІЗІ ТЕХНІЧНОГО СТАНУ МЕХАНІЗМІВ	53
1.1. Діагностика в структурі підтримки життєвого циклу технічних систем	53
1.2. Сучасні моделі та методи обробки і аналізу діагностичних сигналів	60
1.3. Висновки до розділу 1	68
РОЗДІЛ 2. ПОВЕДІНКА НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТА ДІАГНОСТИЧНІ СИГНАЛИ НА РАННІХ СТАДІЯХ ЗАРОДЖЕННЯ І РОЗВИТКУ ДЕФЕКТІВ	69
2.1. Сучасні моделі систем з дефектами	69
2.2. Синергетичні моделі нелінійних динамічних систем з дефектами	71
2.3. Висновки до розділу 2	85
РОЗДІЛ 3. ОЦІНКА ПЕРІОДУ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО СИГНАЛУ ЯК ПРОБЛЕМА ПОШУКУ ПРИХОВАНИХ ПЕРІОДИЧНОСТЕЙ	87
3.1. Когерентний та компонентний методи кореляційного аналізу при невідомому періоді нестационарності	87
3.2. Оцінювання періоду як задача пошуку прихованих періодичностей	91

3.3. ПНВС-модель прихованих періодичностей.....	96
3.4. Порівняльний аналіз ПНВС-методів виявлення прихованих періодичностей.....	100
3.5. Оцінювання функції математичного сподівання та її коефіцієнтів Фур'є при невідомому періоді нестационарності.....	108
3.6. Оцінювання кореляційної функції та її коефіцієнтів Фур'є.....	111
3.7. Висновки до розділу 3	115

РОЗДІЛ 4. ВИЯВЛЕННЯ ПЕРІОДИЧНОЇ НЕСТАЦІОНАРНОСТІ

СИГНАЛІВ У ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ.....	117
4.1. Властивості спектральних характеристик ПНВС.....	117
4.2. Аналіз збіжності спектральних статистик ПНВС	120
4.3. Властивості оцінок базової частоти ПНВС.....	127
4.4. Дискретні оцінки базової частоти ПНВС	142
4.5. Висновки до розділу 4	163

РОЗДІЛ 5. МОДЕЛЬ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО СИГНАЛУ НА ОСНОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ГІЛЬБЕРТА І АНАЛІТИЧНОГО СИГНАЛУ	164
5.1. Модель ПНВС з широкосмугою модуляцією несучої та її аналіз..	169
5.2. Модель ПНВС з вузькосмуговою модуляцією несучої та її аналіз.....	175
5.3. Модель ПНВС з високочастотною амплітудно-фазовою модуляцією несучої та її аналіз	183
5.3.1. Амплітудно-фазово- модульовані гармонійні коливання.....	183
5.3.2. Вузькосмугова гармонічна модуляція	191
5.3.3. Широкосмугова модуляція багатокomпонентного сигналу..	200
5.3.4. Вузькосмугова модуляція багатокomпонентного сигналу ...	207
5.4. Симуляція ПНВС та його аналіз	218
5.5. Висновки до розділу 5	231

РОЗДІЛ 6. ВИЯВЛЕННЯ ТА ОЦІНЮВАННЯ РОЗВИТКУ ДЕФЕКТІВ НА ОСНОВІ АНАЛІЗУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ.....	233
6.1. Аналіз вібраційного діагностичного ПНВС декантера.....	233
6.2. Порівняння результатів обробки ПНВС декантера з методом “квадрату огинаючої”	258
6.3. Аналіз вібрації підшипника кочення з пошкодженим зовнішнім кільцем	265
6.4. Застосування моделі ПНВС для раннього виявлення дефекту шляхом аналізу оптичного спекл- сигналу зображень	275
6.5. Висновки до розділу 6	287
 ВИСНОВКИ.....	 290
 ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ	 293
 ДОДАТКИ	 320

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

- КІН – коефіцієнт інтенсивності напружень
МНК – метод найменших квадратів
ПКВП – періодично корельований випадковий процес
ПКВС – періодично корельований випадковий сигнал
ПНВП – періодично нестационарний випадковий процес
ПНВС – періодично нестационарний випадковий сигнал
BPFO – ball pass frequency outer
CWRU – Case Western Reserve University
DFT – discrete Fourier transform
DIC – digital image correlation
DTFT – discrete in time Fourier transform
EMD – empirical mode decomposition
IMP - inspection maintenance plan
IMR – inspection maintenance repair
ISO – international standard organization
LCM – life cycle management
NDT – non-destructive testing
PHM – prognostic and health management
SES – squared envelope spectrum
SHM – structure health monitoring

ВСТУП

Актуальність теми. Виявлення дефектів у складних динамічних технічних системах є складовою частиною діагностики систем. Технічна діагностика – це перевірка симптомів та синдромів для визначення характеру несправностей або відмов технічних об’єктів (структур). Сучасна діагностика означає такі терміни як несправність, відмова та дефект. Під несправністю (“fault”) розуміють стан предмета, пристрою чи системи (структури), який виникає, коли один із його компонентів або вузлів деградує чи виявляє ненормальну поведінку. Під відмовою (“failure”) розуміють припинення здатності предмета, пристрою, системи (структури) до виконання необхідних функцій. Відмова, за означенням, є подією, тоді як несправність є станом системи. Дефектом в стандартному означенні вважається відхилення контрольованого параметру за межі встановленого допуску, тобто це стан вузла чи елемента системи. Наявні стандартні означення діагностики систем не передбачають такого поняття як “дефект на ранній стадії розвитку”, коли відхилення контрольованих параметрів елемента системи не виходить за межі встановленого дозволених допуску. Таким чином, сучасна стандартизована, а отже, обов’язкова до застосування практика не передбачає виявлення та класифікації таких дефектів, котрі не призводять до збоїв чи відмови системи. З іншої сторони, чим швидше виявлений дефект, тим очевидно, вища точність оцінювання фактичного стану системи та його прогнозування на заданий період часу. Таким чином діагностика дефектів на ранніх стадіях зародження і розвитку, до появи у системі симптомів типу “збій” чи “відмова” є важливою складовою структури підтримання її життєвого циклу досліджуваної структури (системи, механізму). Раннє виявлення та оцінювання ступеня розвитку дефектів в системах дозволяє суттєво скоротити видатки на організацію планових обслуговувань та ремонтів системи обмежити збитки унаслідок потенційної аварійної зупинки через запобігання аварії. Таким чином

виявлення та оцінювання ступеня розвитку дефектів на ранніх стадіях їх зародження та розвитку є критично важливою задачею для управління життєвим циклом складних технічних систем та оптимізації видатків на їх підтримку.

Виявлення несправностей, які ще не привели до аварійних ситуацій, визначення ступеня розвитку дефекту та його ознак можливі лише на основі детального вивчення структури діагностичних сигналів та її зв'язку з кінематикою і динамікою досліджуваної системи. Опис структури сигналів, в свою чергу, можливий на основі адекватних математичних моделей, які відображають ті їх риси, що є необхідними для встановлення стану системи. Слід зауважити, що більшість існуючих складних технічних систем зазвичай працюють у більш-менш регулярному номінальному (оптимальному стаціонарному) найчастіше циклічному режимі. Такий режим передбачається на етапі проектування системи і підтримується в процесі її експлуатації. Нестационарні режими експлуатації (наприклад режим запуску чи зупинки системи) та інші є критичними для складних систем (механізмів) і призводять до їх прискореного зношування, появи дефектів і виходу з ладу. У загальному випадку нестационарність в поведінці системи у номінальному режимі роботи при діагностиці є ознакою розвитку певного процесу в досліджуваній системі, котрий підлягає прискіпливому аналізу. З однієї сторони, складні системи як правило мають певну циклічність у роботі, котра викликається наприклад циклічним зовнішнім споживанням продукту системи, роботою двигунів чи функціонуванням певних систем управління з розвинутими контурами зворотних зв'язків та рядом інших факторів. При цьому слід мати на увазі, що робота складних систем супроводжується значним числом стохастичних процесів, котрі виникають як з реальних взаємодій між елементами системи так і її зовнішніх зв'язків. Діагностичні сигнали очевидно відображають процеси, котрі протікають у досліджуваній системі, тобто процеси є первинними при формуванні таких сигналів.

Повторюваність і стохастичність є характерними ознаками коливних процесів у нелінійних динамічних системах. Повторюваність зумовлена циклічним принципом дії багатьох механізмів, а стохастичність є наслідком випадкового характеру властивого всім параметрам елементів реальної системи – від похибок їх виготовлення та установки до флуктуацій товщини і якості змазки, стохастичних варіацій сил тертя, спонтанних змін навантаження, чи живлення, впливом турбулентності зовнішніх потоків повітря на роботу турбіни і т. п. Оскільки поява дефектів приводить до нелінійності динамічних систем, то повторюваність і стохастичність виступають у властивостях коливань не незалежно, а у взаємодії, що проявляється у складній взаємній модуляції складових діагностичних сигналів. Саме в характері такої взаємодії проявляються ті властивості коливного процесу, які в багатьох випадках є визначальними для встановлення стану досліджуваного об'єкта, що його породжує. Це робить діагностичні сигнали періодично нестационарними та складним об'єктом для аналізу, оскільки нестационарність, породжена дефектом на ранній стадії розвитку маскується згаданими вище значно потужнішими регулярними та нестационарними складовими.

Найбільш відповідними моделями для опису та аналізу складної взаємодії регулярних та стохастичних складових у складі діагностичних сигналів є періодичні та майже періодичні нестационарні випадкові сигнали, (далі ПНВС). Такі випадкові сигнали та їх математичні моделі (процеси) також відомі в літературі як циклостационарні. Перші роботи з розробки теоретичних моделей дослідження періодично нестационарних випадкових процесів (циклостационарних процесів, періодично корельованих випадкових процесів) були зроблені в працях Н. Hurd, W. Gardner, О. Коронкевича, Л. Гудзенко, Є. Гладишева, Н. Ogura, Я. Драгана, І. Яворського, Б. Марченка, М. Мисловича, Н. Шульженко, М. Приймака, Б. Яворського, J. Antoni.

Підхід, що ґрунтується на моделях періодично корельованих випадкових процесах (ПКВП), був започаткований Я.П. Драганом та І.М. Яворським у Фізико-механічному інституті ім. Г.В. Карпенка НАН України спочатку для

аналізу нестационарних сигналів в акустиці, згодом для моделювання процесів у геофізиці, та розвинутий і апробований професором І.М. Яворським та його учнями для аналізу діагностичних сигналів вібрації різноманітних механізмів та систем. У фундаментальній монографії І.М. Яворського викладено основні принципи побудови кореляційних моделей ПНВС. Дефекти обертових механізмів проявляються у структурі вібраційних сигналів як у генеруванні нових гармонічних складових, так і в складних взаємних модуляціях сигналів, у тому числі стохастичних сигналів різної природи. Імовірнісні характеристики ПНВС є носіями інформації про структуру таких сигналів, тому вони можуть використовуватися для діагностики як безпосередньо, так і бути основою для формування нових діагностичних ознак. Такі ознаки дають можливість виявляти дефекти вже на ранніх стадіях розвитку. Важливими аспектами створення методології ранньої діагностики дефектів окрім встановлення факту наявності дефекту в системі є можливість його класифікації, локалізації та оцінювання. Тобто дефект повинен бути ототожнений з певним елементом чи процесом у діагностованій системі шляхом встановлення взаємозв'язків чи залежностей з певними відомими складовими моделі. Таку взаємозалежність з огляду на імовірнісну природу появи дефектів та присутність у діагностичному сигналі значних стохастичних складових очевидно слід шукати в кореляційних взаємозв'язках між складовими сигналу, позаяк саме кореляція є добре вивченою мірою лінійної схожості випадкових процесів і можливе використання розробленого підходу ПКВП до аналізу ПНВС. Отже для вирішення поставленої задачі повинна бути розроблена модель ПНВС та розроблені відповідні методи аналізу кореляційних параметрів ПНВС, що дозволить створити відповідну методологію.

На даний час існують дві основні групи широко використовуваних підходів до аналізу ПНВС. Перш за все слід відмітити “класичний” підхід, котрий називають методом “обвідної”, що зводиться до прямого детектування діагностичного сигналу і дослідження виділеної низькочастотної складової методами Фур’є-аналізу чи виділення так званого “квадрату обвідної” і

дослідження його Фур'є-спектру. В кінцевому випадку аналізується спектральний склад виділеної низькочастотної “обвідної” на предмет наявності та оцінювання у ньому потужності гармонік, частоти яких відрізняються на величину частоти обертання приводу механізму. Цей підхід є найдавнішим, найпростішим і досі широко використовується у різних варіантах – прямого детектування, пошуку та виділення “інформаційної смуги частот” різними методами та ряду інших варіантів. Основним недоліком цих методів є той, що обробка сигналу ведеться без врахування взаємкореляційних зв'язків між різними його складовими.

Іншою групою методів обробки сигналу ПНВС є виділення модуля аналітичного сигналу чи квадрату модуля аналітичного сигналу на основі використання перетворення Гільберта для демодуляції сигналу. Суттєвою перевагою цього підходу є можливість аналізу одночасно усіх видів модуляцій несучої – амплітудної, частотної та фазової а також їх ефективне розділення. Чисто “механічне” перенесення формалізму перетворення Гільберта на аналіз багатокomпонентних широкосмугових сигналів, нехтування відомими суттєвими обмеженнями у застосуванні перетворення Гільберта до обробки модульованих сигналів сформульованих теоремами Бедрояна та Натталла призводить як до помилок при виявленні дефектів так і до суттєвих похибок при їх класифікації та оцінюванні ступеня розвитку. Існують методи декомпозиції ПНВС на вузькосмугові складові з наступним використанням перетворення Гільберта найбільш відомим серед яких є метод Гільберта-Хуанга та його різні версії, однак всі вони є евристичними і не мають теоретичного обґрунтування. Тобто з однієї сторони існує необхідність у детальному аналізі складного діагностичного сигналу від механізму, котрий не проявляє стандартних ознак несправності для виявлення дефектів на початкових стадіях розвитку, а з іншої сторони – відсутні теоретично обґрунтовані моделі таких сигналів та методи їх аналізу.

Це протиріччя становить суть наукової проблеми: розробки методів статистичного аналізу сигналів вібрацій пошкоджених механізмів на основі

математичних моделей багатокomпонентних нестационарних випадкових процесів зі стохастичною амплітудно-фазовою модуляцією несучих гармонік і з використанням перетворення Гільберта та дослідження їх кореляційно-спектральної структури, що дає можливість встановлювати типи дефектів у механізмах, їх локалізацію та оцінювати ступінь розвитку.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження за темою дисертації проводились у Фізико-механічному інституті ім. Г.В. Карпенка НАН України при виконанні ряду держбюджетних тем НАН України:

- “Розроблення нових інформаційних технологій спекл-кореляції і фазозсувної спекл-інтерферометрії для дослідження напружено-деформованого стану поверхонь зразків конструкційних матеріалів та динаміки їх руйнування” (2004-2006, держреєстраційний номер 0104U004176);
- “Дослідження структури просторових полів переміщень і деформацій поверхонь конструкційних матеріалів методами спекл-метрології та інтерферометрії” (2007-2009, 0107U004068);
- “Розроблення методів визначення параметрів локального руйнування конструкційних матеріалів під дією статичних і циклічних навантажень на основі фазозсувної інтерферометрії і спекл-кореляції” (2010-2012, 0110U000432);
- “Встановлення методами спекл-метрології та інтерферометрії деформаційних характеристик матеріалів для оцінювання параметрів їх руйнування з урахуванням локальних зон пружно-пластичного стану” (2013-2015, 0113U000306);
- “Розроблення технологій діагностування елементів конструкцій та локального руйнування засобами оптичної спекл-метрології, фазозсувної інтерферометрії та цифрової голографії” (2016-2018, 0116U004952);

- “Розроблення інформаційних технологій та засобів вібраційної діагностики на основі періодично нестационарних нелінійних моделей з використанням перетворення Гільберта” (2019-2021, 0119U101061);
- “Інформаційно-вимірювальна система вібраційного контролю для неперервного моніторингу обертових вузлів” (2021, 0121U110376);
- “Розроблення методів кореляційного аналізу поліритмічної структури вібраційних сигналів для підвищення ефективності діагностики елементів вузлів механізмів з різними швидкостями обертання” (2022-2024, 0122U002138);
- науково-дослідних робіт програми “Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин” (РЕСУРС), в рамках цільової програми наукових досліджень НАН України “Надійність і довговічність матеріалів, конструкцій, обладнання та споруд” “Спеціалізовані пристрої для виявлення дефектів на ранніх стадіях їх зародження при визначенні технічного стану механізмів” (2018-2020, 0119U101190);
- ряду госпдоговорів з діагностування вугільних конвеєрів у морському торговому порту ЮЖНИЙ (2019, 2023); приводу стрілового конвеєру судно-навантажувальної машини на ТОВ “ТІС-РУДА”, с. Візирка, Одеська обл. (2018, 2020); головних механізмів приводу контейнерних перевантажувачів та механізмів кабельних барабанів спредерів причальних контейнерних перевантажувачів “ZPMC” інв. № 7001–№ 7003, що належать ТОВ “Бруклін-Київ Порт”, оператору контейнерного терміналу на базі причалів № 42-43 ДП “Одеський морський торговельний порт” (2019, 2023), діагностики підшипникових вузлів візків трамвайного вагона T5L641 на ТОВ “ЗАВОД ЕЛЕКТРОНМАШ” (2023, 2024), вібраційного стану підшипникових вузлів приводів фрез дисольверів ТОВ “Флексорес” (2023), “Дослідження сигналів вібрації методами нестационарних випадкових процесів для встановлення стану елементів обертових вузлів газотурбінних двигунів ДП “Івченко-Прогрес” (2024-2025).

Мета та завдання досліджень. Метою дисертаційної роботи є дослідження моделей діагностичних сигналів у вигляді періодично нестационарних випадкових процесів зі стохастичною амплітудно-фазовою модуляцією несучих гармонік і розроблення методів їх аналізу на основі перетворення Гільберта для встановлення характерних особливостей модуляції з метою підвищення ефективності виявлення і визначення параметрів пошкоджень на ранніх стадіях розвитку.

Досягнення означеної мети зумовило постановку і вирішення таких завдань:

- проаналізовано процеси генерації нових стійких станів (дефектів) на основі моделей нелінійних динамічних систем зі збуренням;
- проведено порівняльний аналіз когерентних і компонентних ПНВС-методів виявлення прихованих періодичностей та отримано оцінки похибок періоду нестационарності;
- досліджено перетворення Гільберта багатоконпонентного ПНВС і кореляційну структуру аналітичного сигналу;
- проведено теоретичний аналіз моделі ПНВС за широкосмугової, вузькосмугової та амплітудно-фазової модуляції несучої;
- проаналізовано смугову фільтрацію високочастотно-модульованого багатоконпонентного ПНВС і запропоновано метод розділення компонент;
- показано, що фільтрація сигналу ПНВС повинна базуватися на оцінці взаємних кореляцій вузькосмугових високочастотних компонент, використання смуги що охоплює не всі корельовані гармоніки призводить до зниження ефективності діагностування;
- показано, що періодична нестационарність другого порядку ПНВС викликана взаємними кореляціями різних високочастотних компонент, а взаємні кореляції їх квадратур можна використати для опису пошкодження та його специфічних особливостей;

- розроблено алгоритми та створено програмне забезпечення для реалізації ПНВС-методу обробки діагностичних сигналів на основі перетворення Гільберта та аналітичного сигналу;
- проведено симуляцію реалізації ПНВС та аналіз симульованих даних запропонованими методами;
- проведено обробку реальних діагностичних сигналів на основі розробленої моделі та порівняльний аналіз отриманих результатів з кращими відомими методами;
- проаналізовано властивості амплітудних спектрів детерміністичних коливань і часових змін дисперсії для розподіленого та локалізованого дефектів.

Об’єктом дослідження є діагностичні сигнали мішаної природи від машин і агрегатів зі складними взаємними модуляціями та потужними регулярними і стохастичними компонентами.

Предметом дослідження є математичні моделі періодично нестационарних випадкових сигналів, побудовані на основі перетворення Гільберта та аналітичного сигналу, методи оцінювання їх спектральних та імовірнісних характеристик і встановлення зв’язків між кореляційними, спектральними характеристиками сигналів та ранніми стадіями розвитку дефектів в системах.

Методи досліджень. Для вирішення поставлених завдань в дисертаційній роботі застосовуються методи теорії випадкових процесів, математичної статистики, методи неперервного та дискретного Фур’є аналізу, методи обчислювальної математики; методи статистичної теорії періодично нестационарних випадкових процесів, методи розв’язування нелінійних рівнянь, метод малого параметру, комп’ютерне моделювання, а також експериментальні дослідження.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному, а саме:

вперше:

- сформульовано означення ранньої стадії розвитку дефекту як періодично нестационарного випадкового процесу в околі точки біфуркації

нелінійної динамічної системи зі збуренням, котрий супроводжується появою в поведінці системи прихованих коливань, що дало можливість сформулювати вимоги до побудови моделі діагностичних сигналів;

– встановлено, що до періодичної нестационарності (прихованої періодичності) призводять взаємні кореляції між модулюючими процесами, що дозволило визначити діагностичні параметри сигналів для виявлення та оцінки ступеня розвитку дефектів;

– розроблено теоретичні основи використання перетворення Гільберта для аналізу діагностичних ПНВС, що характеризуються широкосмуговою високочастотною модуляцією несучих. Показано, що перетворення Гільберта безпосереднього не може використовуватися для демодуляції такого сигналу;

– показано, що аналітичний сигнал від ПНВС з високочастотною широкосмуговою та амплітудно-фазовою модуляцією несучих є також ПНВС, а квадрат модуля аналітичного сигналу, який називають “квадратом обвідної” є випадковим процесом, моментні функції якого змінюються періодично з часом, тому його аналіз необхідно проводити методами ПНВС та встановлено, що застосування відомих методів “обвідної”, “спектру квадрату обвідної” для аналізу багатокomпонентних ПНВС є некоректним;

– показано, що стохастично амплітудно-фазово модульовані коливання ПНВС представляються суперпозицією високочастотних компонент, які є стаціонарними і взаємно періодично нестационарно зв’язаними випадковими процесами, що зводить дослідження властивостей сигналу до аналізу кореляційних компонентів вищих порядків квадратур високочастотних несучих;

– показано, що фільтрація сигналу ПНВС повинна базуватися з врахуванням оцінок взаємних кореляцій високочастотних компонент вищих порядків, що дозволило сформулювати вимоги до коректного вибору смуги обробки ПНВС та підвищити ефективність діагностування;

– показано, що використання смугової фільтрації і перетворення Гільберта для виділення та аналізу кореляцій квадратур високочастотних гармонік дає змогу побудувати карту кореляцій, котра має характерні особливості для різних

дефектів і служить основою для обґрунтованого вибору смуги частот при аналізі сигналу;

– обґрунтовано процедури відбору та обробки діагностичних сигналів, які дають можливість виявити і описати в рамках моментних функцій ПНВП першого і другого порядків їх структуру, в тому числі структуру високочастотної, широкосмугової та амплітудно-фазової модуляції, що забезпечило вищу ефективність діагностики у порівнянні з відомими підходами;

– розроблений підхід застосований до аналізу розподіленого і локального дефектів механізмів в рамках моментних функцій першого і другого порядків, описані основні закономірності та відмінності між сигналами таких дефектів, проведено демодуляцію високочастотних компонент та описана їх кореляційна структура на основі побудованих карт кореляцій;

– встановлено, що високочастотна модуляція несучих гармонік ПНВС моделі вібрацій підшипника є вузькосмуговою і може бути описана суперпозицією представлень сигналу за формулами Райса;

показано, що кореляції квадратур модуляцій є повільно зникаючими осциляційними функціями часового зсуву, що зумовлює схожу форму кореляційних компонентів, а інтервал зникання кореляційних компонентів є набагато більшим ніж період нестационарності.

Практичне значення одержаних результатів. Введені моделі періодично нестационарного випадкового сигналу на основі перетворення Гільберта і аналітичного сигналу дають можливість кількісно характеризувати взаємозв'язки між складовими діагностичного сигналу, на основі експериментальних даних виявляти, типізувати та оцінювати стан дефектів у системах на ранніх стадіях розвитку, встановити їх походження та фізичну природу.

Отримані наукові результати доцільно використовувати в галузі діагностики систем різної природи та в якості підсистем в системах управління життєвим циклом.

Практична цінність роботи полягає, насамперед, у створенні моделей, методів ПНВС та програмно-алгоритмічного забезпечення для аналізу діагностичних сигналів різного походження. Це забезпечення надає можливість виявляти сигнал від дефекту, встановлювати оптимальні параметри обробки цього сигналу, отримувати оцінку розвитку дефекту, ідентифікувати його тип та походження. Такі дані є важливими як для встановлення поточного стану систем так і прогнозування цього стану на заданий період часу. Рання діагностика дефектів у системах є важливим аспектом забезпечення їх надійності і працездатності, зменшення затрат на підтримку працездатності; планування і забезпечення ремонтів та технічного обслуговування.

Результати дисертаційних досліджень використано у Фізико-механічному інституті ім. Г.В. Карпенка НАН України при виконанні держбюджетних тем (Додаток А).

Практична цінність запропонованих у дисертаційній роботі моделей періодично нестационарних випадкових сигналів, методів їх декомпозиції та аналізу для виявлення, локалізації та оцінювання ступеня розвитку дефектів в механізмах підтверджується результатами їх практичного використання при проведенні діагностичних робіт на ряді промислових підприємств України, зокрема на теплових електростанціях у смт. Добротвір (Львівська обл.), ДП “Одеський морський торговельний порт”, ДП “Морський торговельний порт “Южний” (Одеська обл.), ТОВ “ЗАВОД ЕЛЕКТРОНМАШ”.

Результати дисертаційної роботи впроваджено у ряді підприємств України: ТОВ “Кипер-Пласт”, спеціалізований експертно-технічний центр ТОВ Фірма “ДІАЛАБ” Лтд, ТОВ “ПОРТТЕХЕКСПЕРТ”, ТОВ “ДП Ворлд ТІС Південний”, що підтверджено відповідними актами (Додатки Б-Д).

Результати дослідження можуть бути застосовані при виконанні науково-дослідних робіт у Фізико-механічному інституті ім. Г.В. Карпенка НАН України. Також результати роботи можуть бути використані при виконанні робіт по встановленню технічного стану механізмів паливно-енергетичного сектору, виявлення рівня підвищеної вібрації складних машинних комплексів

на промислових підприємствах України, діагностування газотурбінних двигунів на підприємствах-виробниках та експлуатантах відповідної техніки.

Обґрунтованість і достовірність наукових положень, висновків і рекомендацій. Автором на високому рівні, у достатньому обсязі, проведені теоретичні та експериментальні дослідження. Обґрунтованість та достовірність наукових положень і результатів, рекомендацій і висновків підтверджується коректною постановкою завдань досліджень, заданою точністю даних, що отримані в результаті моделювання та результатами проведених симуляційних та натурних експериментів з обробки реальних діагностичних сигналів. Наукові положення, висновки та рекомендації обґрунтовані на належному рівні, опубліковані в періодичних наукових виданнях, підтверджені патентами України на винахід, апробовані на міжнародних і всеукраїнських науково-практичних конференціях. Про належний ступінь теоретичної обґрунтованості та достовірності наукових результатів, що наведені у дисертаційній роботі, свідчать відповідні методологічні засади дослідження.

Особистий внесок здобувача. У працях, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належить: [1] – аналіз властивостей аналітичного сигналу за різних видів і типів модуляцій, обробка даних, представлення та аналіз матриці кореляцій; [2] – оцінка прихованої періодичності в складі сигналу, аналіз та обробка даних; [3] – модель сигналу ПНВС пошкодженого підшипника; [4] – модель дефектів і спосіб аналізу нестационарного сигналу кореляційним методом; [5] – метод оцінювання похибок параметрів Вільямса визначених на основі даних цифрової кореляції зображень; [6] – метод оцінювання похибок параметрів Вільямса визначених на основі даних цифрової кореляції зображень; [7] – модель вібросигналу, отримання та обробка даних; [8] – отримання та обробка даних спекл-зображень [9] – метод моделювання і оцінки похибки визначення параметрів Вільямса; [10] – метод виділення корельованих сигналів квадратур фазової модуляції; [11] – дослідження і аналіз сигналу віброприскорення; [12] – обґрунтування вибору моделі сигналу віброприскорення; [13] –

метод моделювання і оцінки похибки визначення параметрів Вільямса; [14] – модель ПНВС сигналу та його перетворення Гільберта; [15] – модель високочастотно модульованого сигналу; [16] – метод оцінювання прихованого періоду в структурі сигналу; [17] – модель модульованого біперіодичного сигналу; [18] – обробка даних віброприскорення; [19] – побудова моделі детермінованої складової сигналу; [20] – обробка даних, модель несучої сигналу; [21] – принцип попередньої обробки зареєстрованого сигналу; [22, 23] – модель сигналу віброприскорення; [24] – модель модуляції сигналу; [25] – перетворення Гільберта від моделі сигналу; [26] – модель ПНВС; [27] – модель і метод визначення спектру перетвореного сигналу; [28] – методи детектування фазової модулюючої складової; [29] – модель вузькосмугової високочастотної модуляції ПНВС; [34] – виділення та кореляційний аналіз складових квадратур ПНВС вищих порядків; [35] – модель виділення квадратур моделюючої складової; [36] – метод виділення квадратур; [37] – обробка сигналу віброприскорення; [38] – модель широкосмугової високочастотної модуляції сигналу віброприскорення; [39] – модель вузькосмугової високочастотної модуляції в структурі сигналу; [40] – модель високочастотної модуляції сигналу; [41] – модель та визначення базової частоти ПНВС; [42] – виділення квадратур модулюючих складових; [43] – виділення квадратур модулюючих складових; [44] – обробка даних віброприскорення, побудова та аналіз кореляційної матриці відібраного сигналу; [45] – методи діагностики двигуна; [46] – опис сигналів підшипника методами ПКВП [47] – принцип відбору діагностичного сигналу; [48–51, 76] – структура вібродіагностичної системи; [52] – метод виділення спектральних компонент; [53, 55–59, 69] – структура методу обробки сигналу; [54] – постановка експерименту; [60] – модель модуляції діагностичного сигналу; [61–63] – дослідження впливу нестационарності на аналіз вібраційних сигналів; [64] – метод відбору сигналу; [65, 66] – особливості об'єктів діагностики; [67, 71] – структура системи відбору сигналів; [68] – опис

структури параметрів сигналів; [70, 72–74] – методи відбору сигналів; [75] – вібраційний метод діагностики; [77] – модель модуляції несучих гармонік.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи пройшли апробацію на міжнародних наукових та науково-практичних конференціях, зокрема: 3 KhPI Week on Advanced Technology (Харків, 2022); 11, 12, 13 і 14 International Conferences on Advanced Computer Information Technologies (Germany, 2021; Slovakia, 2022; Poland, 2023; Czech Republic, 2024); 12 і 13 International Conferences on Electronics and Information Technologies (Львів, 2021, 2023); XX Міжнародній науково-технічній конференції “Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта” (Київ, 2019); XX, XXI, XXII і XXIII Міжнародних науково-технічних конференціях “Приладобудування: стан і перспективи” (Київ, 2021, 2022, 2023, 2024); 14, 15, 16 і 17 Міжнародних науково-практичних конференціях “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (Київ, 2021, 2022, 2023, 2024); 2 Міжнародній конференції “Неруйнівний контроль та моніторинг технічного стану”. (Одеса, 2021); Міжнародній науково-практичній конференції “Міцність і довговічність сучасних матеріалів та конструкцій” присвяченій 70-ти річчю з дня народження член-кореспондента НАН України, проф. П. Яснія (Тернопіль, 2022); конференції “Зварювання та технічна діагностика для відновлення економіки України” (Київ, 2022); 16-й міжнародному симпозиумі українських інженерів-механіків (Львів, 2023); III Міжнародній науково-технічній конференції “Перспективи розвитку машинобудування та транспорту” (Вінниця, 2023); XIV Міжнародній науково-практичній конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем” (Чернігів, 2024); Міжнародній науково-практичній конференції “Перспективи розвитку озброєння та військової техніки сухопутних військ” (Львів, 2024).

Публікації. За результатами досліджень, які викладені в дисертації, опубліковано 77 наукових праць (Додаток Е), серед яких 29 у наукових фахових виданнях України та закордонних виданнях (статті задовольняють вимогам про публікацію однієї статті в одному номері журналу), з них

10 статей включено в наукометричні бази Scopus та/або Web of Science (з них, відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank або Journal Citation Reports, 6 статей віднесено до квартилю Q1-Q2, та 4 – до квартилю Q3), та 44 публікації у матеріалах міжнародних та всеукраїнських конференцій (з них 11 публікацій включено в наукометричні бази Scopus та/або Web of Science), 4 патенти. Загалом 21 публікація, що відображає основні результати роботи, включено до наукометричної бази Scopus та/або Web of Science.

Структура та загальний обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації складає 344 сторінки, з яких основний зміст викладено на 292 сторінках друкованого тексту та, в тому числі, містить 79 рисунків і 11 таблиць. Список використаних джерел складається з 258 найменувань на 27 сторінках. Додатки у кількості 10 на 24 сторінках. Додатки містять список праць автора за темою дисертації, часто використовувані теоретичні викладки, акти впровадження результатів дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 1

ДІАГНОСТИКА ТА ДІАГНОСТИЧНІ СИГНАЛИ ПРИ АНАЛІЗІ ТЕХНІЧНОГО СТАНУ МЕХАНІЗМІВ

1.1. Діагностика в структурі підтримки життєвого циклу технічних систем.

Виявлення дефектів у складних динамічних технічних системах є складовою частиною діагностики цих систем. Технічна діагностика – це перевірка симптомів та синдромів для визначення характеру несправностей або відмов технічних об'єктів (структур) [1–4]. Симптом – це інформаційне повідомлення, отримане за допомогою спостереження (людиною чи технічною), що з певною (відомою) імовірністю може вказувати на наявність ненормального режиму. Синдром це група симптомів, котрі разом вказують на чи характеризують ненормальний режим. Під несправністю (“fault”) розуміють стан предмета, пристрою чи системи (структури), який виникає, коли один із його компонентів або вузлів деградує чи виявляє ненормальну поведінку. Під відмовою (“failure”) розуміють припинення здатності предмета, пристрою, системи (структури) до виконання необхідних функцій. (Слід відрізнити відмову, котра за означенням є подією від несправності, яка є станом системи.). Режим відмови – це явище спостереження відмови. Аналізом основної причини відмови (root cause failure analysis) називають систематичне вивчення предмета (пристрою, системи, структури) для ідентифікації режиму відмови, визначення механізму відмови та встановлення базової причини, котра зумовила відмову. Дефектом в стандартному означенні вважається відхилення контрольованого параметру за межі встановленого допуску, тобто це стан. Тут слід окремо зауважити що наявні стандартні означення стану діагностованої системи не передбачають такого поняття як “дефект на ранній стадії розвитку”, коли таке

відхилення не виходить за межі встановленого дозволеного допуску. Таким чином, сучасна стандартизована, а отже обов'язкова до застосування практика не передбачає виявлення та класифікації таких дефектів, котрі не призводять до збоїв чи відмови системи.

Технічна діагностика є важливою складовою частиною сучасних технологій прогнозування і управління життєвим циклом (Prognostics and health management – PHM) продуктів, процесів, систем [5]. Застосування діагностики і прогнозування стану досліджуваної структури на основі діагностичних даних дозволяє суттєво знизити видатки обслуговування об'єктів чи процесів та надає корисну інформацію, яка уможлиблює прийняття обґрунтованих правильних рішень для підвищення їх продуктивності, безпеки, надійності та ремонтоздатності.

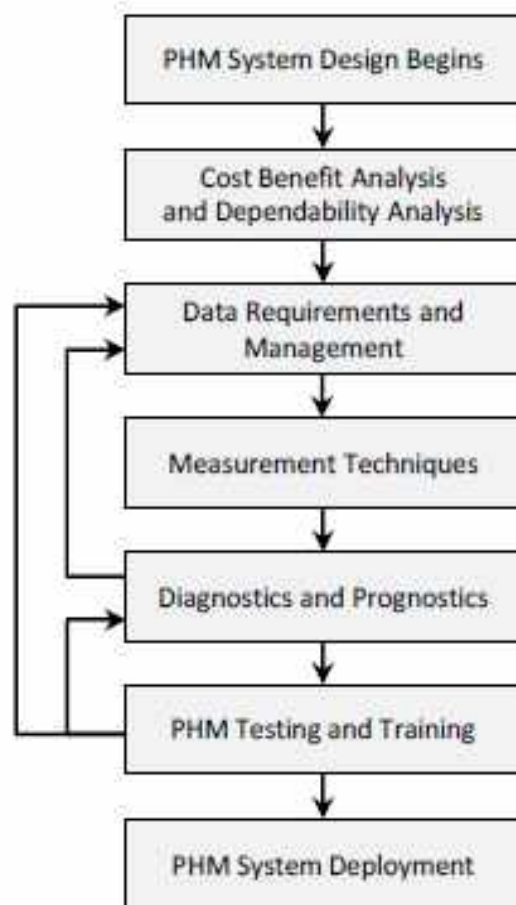


Рис. 1.1.1. Загальна схема розробки системи прогнозування та управління життєвим циклом структури [5]

На рис. 1.1.1 зображено загальну схему побудови системи прогнозування та управління життєвим циклом системи [5] та місце підсистеми діагностики у цьому процесі. Як видно з Рис. 1.1.1, саме діагностика і пов'язаний з нею прогноз стану системи є визначальними при забезпеченні успішного (безвідмовного) функціонування структури протягом часу життя. З іншого боку, через значні економічні витрати, необхідні для підтримання у ефективному та безпечному стані сучасних складних технічних систем (структур), за останні роки було проведено ряд досліджень та практичних розробок стратегій обслуговування та оптимізації витрат на їх обслуговування [6]. Підхід, якому останнім часом надають значну увагу, і який вважається найбільш привабливий для практичних застосувань заснований на описі життєвого циклу структури використовуючи функції життя структури.

Функція життя структури являє собою часову залежність так званого показника ефективності структури, який може представляти наприклад показник надійності (імовірність безвідмовної роботи) або більш складну зважену суму кількох показників [6]. Типова функція життєвого циклу структури [6] з показаним впливом ремонту (обслуговування) наведена на Рис. 1.1.2. Як видно з Рис. 1.1.2, життєвий цикл структури може суттєво збільшуватися, перевищуючи час життя (design life) структури, закладений в процесі проектування за рахунок належного і багатократного (при потребі) обслуговування (діагностики, ремонту, вдосконалення) структури в залежності від економічної доцільності його продовження. Наведене вище формулювання встановлює процес оптимізації вартості життєвого циклу об'єкта на основі евристики та наявних баз знань.

На жаль, більшість величин, що використовуватимуться для такого процесу мають невизначений характер. Їх визначення може базуватися на статистичних базах знань, тому процес оптимізації слід формулювати у імовірнісних параметрах [6-8]. Зазначається, що цю процедуру можна також розробити в ході зворотного аналізу отриманої практичним шляхом функції життя, включаючи також перевизначення певних параметрів, що

використовуються на етапі проектування. Оцінка фактичного стану об'єкта, тобто діагностика дозволяє апріорі періодично оновлювати криву життєвого циклу зменшуючи вплив невизначеності параметрів, що впливають на неї, та перетворює даний підхід у дійсно ефективний інструмент управління інфраструктурою. Оновлення функції життєвого циклу може, наприклад, здійснюватися за допомогою Байєсівських підходів [7-9], теорії доказів Демпстера-Шафера [10] або за допомогою інших, навіть чисто евристичних міркувань чи методів.

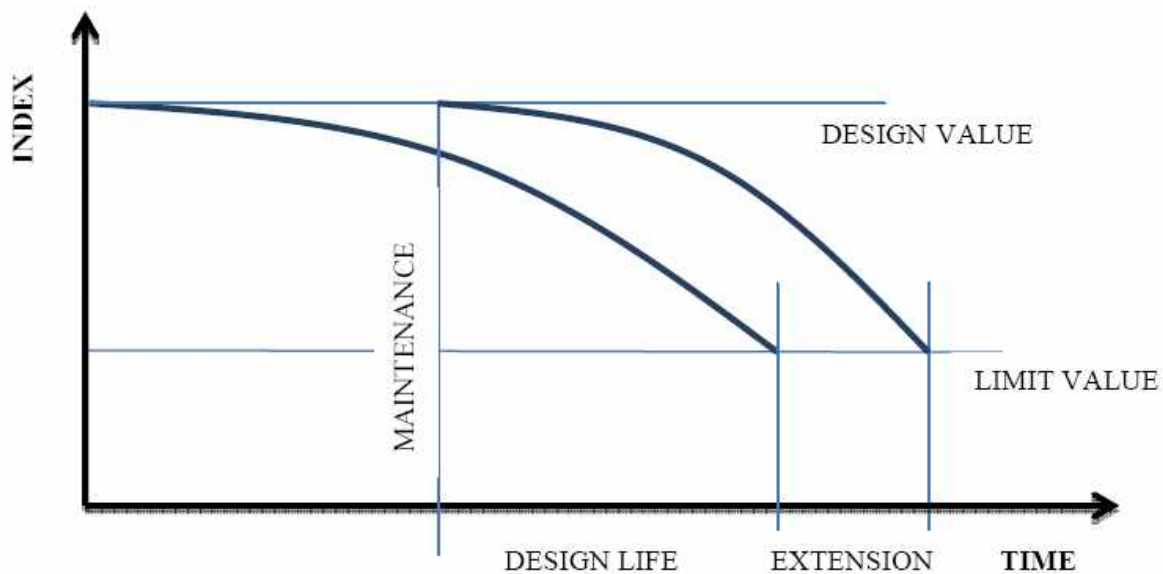


Рис. 1.1.2. Типова функція життєвого циклу (залежність показника ефективності від часу) досліджуваної структури [10]

Діагностика стану структури, означена як Structural Health Monitoring (SHM) у [11] може розглядатися як інструмент для виконання цього завдання (Рис. 1.1.2). Процедура уточнення функції життєвого циклу структури на основі діагностичних даних [9] схематично зображена на Рис. 1.1.3. Важливим аспектом сучасної діагностики є зв'язок з прогностичними алгоритмами, котрі, як було вказано вище, використовують діагностичні дані для уточнення функції життєвого циклу структури. Розробка нових діагностичних алгоритмів та методів раннього виявлення і ідентифікації пошкоджень є важливою частиною сучасних досліджень у галузі моніторингу стану структур. З Рис. 1.1.2

зрозуміло що встановлення оптимального часу ремонту (Maintenance time) системи критично залежить від часу та ступеня розвитку виявлених дефектів. Чим скоріше виявлений дефект, тим очевидно, вища точність оцінювання фактичного стану системи та його прогнозування на заданий період часу. Таким чином діагностика дефектів на ранніх стадіях зародження і розвитку, до появи у системі симптомів типу “збій” чи “відмова” є важливою складовою структури підтримання її життєвого циклу досліджуваної структури (системи, механізму).

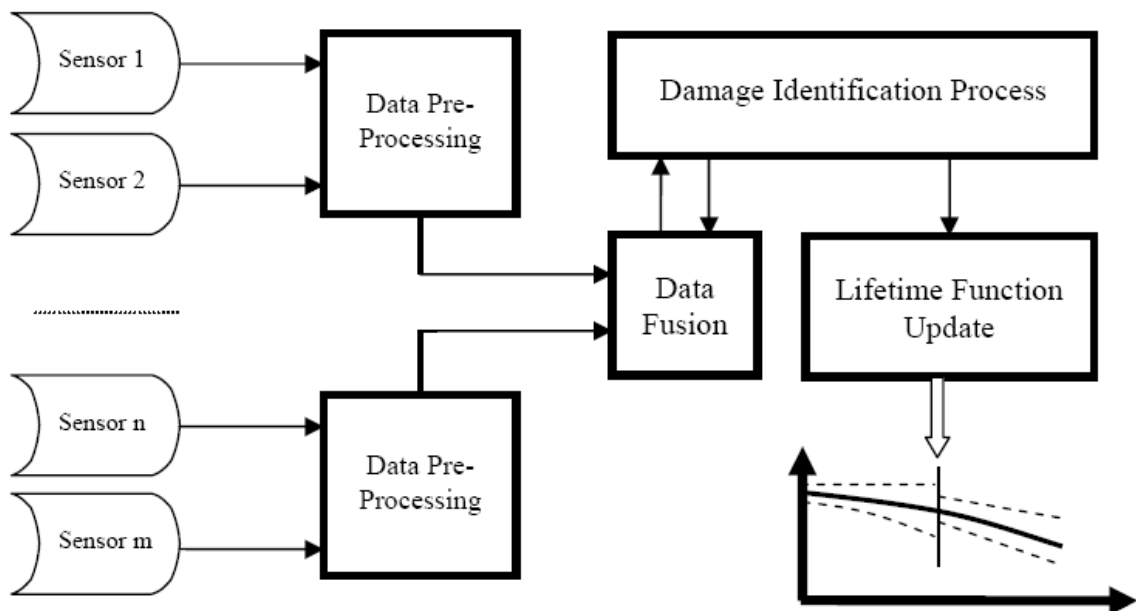


Рис. 1.1.3. Процедура уточнення функції життєвого циклу структури на основі діагностичних даних різних сенсорів [9]

Ідентифікація пошкодження має проходити відповідно до призначеної процедури, здатної проаналізувати дані моніторингу та визначити (встановити факт) виникнення пошкодження, його місцезнаходження та інтенсивність (величину). Відомо сотні наукових праць, статей, доповідей, патентів, стандартів котрі пропонують велику різноманітність таких процедур. Їх ефективність найчастіше доводиться шляхом аналізу даних, отриманих в процесі комп’ютерного моделювання, порівняльних досліджень та маломасштабних лабораторних експериментів. З іншої сторони, переважна

більшість виявлених діагностикою характерних аномалій є цілком передбачуваною, виходячи з конструктивних моделей діагностованих систем чи структур. Перш за все слід відзначити, що всі алгоритми діагностики потребують певного мінімального періоду спостереження [1, 2], протягом якого стан діагностованої структури можна вважати незмінними - так званий еталонний період часу (час спостереження чи тривалість реалізації діагностичного сигналу).

Ефективність діагностичного алгоритму чи методу як правило оцінюють на основі наступних параметрів:

1. Тривалість еталонного (опорного) періоду спостереження.
2. Мінімальне пошкодження, котре можна виявити для заданого співвідношення сигнал/шум у вимірювальному тракті.
3. Час спостереження після появи пошкодження, необхідний для його виявлення діагностичною системою.
4. Здатність до локалізації пошкодження.
5. Здатність визначати величину/інтенсивність пошкодження.
6. Здатність ідентифікувати множинні пошкодження, що виникають в різних місцях.
7. Надійність.

Існуючі технічні системи повинні контролюватися принаймні протягом усього терміну експлуатації. Завдання планування обслуговування системи методами діагностики полягає в тому, щоб мати можливість:

I – розробити оптимальну стратегію для ремонту або заміни пошкоджених (дефектних) компонентів системи;

II – оптимально планувати огляд (діагностику) найважливіших структурних частин системи;

III – підтримання заданих експлуатаційних функцій та вимог безпеки експлуатації системи.

Тобто розробити так званий план IMR (Inspections, Maintenance, Repairs – інспекції, технічного обслуговування, ремонту) [11]. Для складних систем (або

для значної кількості компонентів, що можуть потенційно збоїти), необхідно оптимізувати плани діагностування з точки зору витрат та ефективності [1, 11]. Оптимальним планом обстеження є обстеження (діагностування) у потрібному місці, у потрібний час та за допомогою правильного інструментарію з найменшими витратами [1–3].

Діагностика (інспекція) є важливим етапом у планах IMR [11], оскільки це є єдиний надійний спосіб отримати біжучу оцінку стану системи. Для цього широко застосовуються методи неруйнівного контролю (NDT, Non Destructive Testing) [12, 13]. На практиці існує два рівні аналізу ефективності NDT: оцінка здатності до класифікації пошкоджень і оцінка роздільної здатності [13]. На жаль сучасні технології NDT мають певні обмеження, і часто в умовах експлуатації їх можливості та здатності значно відрізняються від можливостей, що надаються сертифікаційними лабораторіями та/або виробниками, навіть якщо точно виконується протокол діагностування [13, 14]. Це призводить до погіршення показників якості/надійності діагностування. Одним із суттєвих викликів розробки оптимального плану IMP є використання всієї інформації, що існує про особливості вибраної технології і методологій використання NDT. В Україні на даний час адаптовано 18 стандартів ISO в галузі неруйнівного контролю, попередні радянські стандарти втратили чинність.

ISO 13379-1:2015 [12] встановлює 9 основних етапів діагностування машин:

1. Аналіз експлуатаційної готовності і надійності діагностованої машини, ступеня її критичності для технологічного процесу.
2. Складання переліку основних вузлів машини та їх функцій.
3. Аналіз типів відмов та їх зв'язок з неполадками окремих вузлів машини.
4. Встановлення числової характеристики ступеня критичності діагностованої машини для системи в цілому з урахуванням наслідків її відмови (ступеня небезпеки, часу і вартості її відновлення, вплив на якість її продукції) та їх.
5. Вибір типів несправностей, котрі діагностуватимуться.

6. Вибір режимів роботи машини, за яких можна забезпечити найкраще діагностування для вибраних типів несправностей.

7. Вибір діагностичних ознак для аналізу технічного стану машини.

8. Складання переліку контрольованих параметрів на основі яких повинні бути отримані діагностичні ознаки.

9. Вибір методів вимірювань і наборів давачів, котрі необхідно використати для отримання значень контрольованих параметрів безпосередньо в процесі вимірювань чи після обробки даних вимірювань.

Ефективність підтримання працездатності технічної системи в кінцевому випадку залежить від часу виявлення дефекту (пошкодження) та оцінки ступеня його розвитку. Чим швидше виявлено та локалізовано дефект і правильно оцінено ступінь його розвитку тим менші видатки на організацію планового ремонту системи і тим менші збитки унаслідок потенційної аварійної зупинки через запобігання аварії. Таким чином виявлення та оцінювання ступеня розвитку дефектів на ранніх стадіях їх зародження та розвитку є критично важливою задачею для управління життєвим циклом складних технічних систем та оптимізації видатків на їх підтримку.

1.2. Сучасні моделі та методи обробки і аналізу діагностичних сигналів.

Виявлення несправностей, які ще не привели до аварійних ситуацій, визначення ступеня розвитку дефекту та його ознак можливі лише на основі детального вивчення структури діагностичних сигналів та її зв'язку з кінематикою і динамікою досліджуваної системи. Опис такої структури сигналів, в свою чергу, можливий на основі адекватних математичних моделей, які відображають ті їх риси, що є необхідними для встановлення стану системи. Слід зауважити, що більшість існуючих складних технічних систем зазвичай працюють у більш-менш регулярному номінальному (оптимальному стаціонарному) найчастіше циклічному режимі. Такий режим передбачається

на етапі проектування системи і підтримується в процесі її експлуатації. Нестационарні режими експлуатації (наприклад режим запуску чи зупинки системи) та інші є критичними для складних систем (механізмів) і призводять до їх прискореного зношування, появи дефектів і виходу з ладу. У загальному випадку нестационарність в поведінці системи у номінальному режимі роботи при діагностиці є ознакою розвитку певного процесу в досліджуваній системі, котрий підлягає прискіпливому аналізу [15-18]. При цьому слід мати на увазі, що робота складних систем супроводжується значним числом стохастичних процесів, котрі виникають як з реальних взаємодій як між елементами системи так і її зовнішніх зв'язків. З іншої сторони, складні системи як правило мають певну циклічність у роботі, котра викликається наприклад циклічним зовнішнім споживанням продукту системи, роботою двигунів чи функціонуванням певних систем управління з розвинутими контурами зворотних зв'язків та рядом інших факторів.

Повторюваність і стохастичність є характерними ознаками коливних процесів у нелінійних динамічних системах. Повторюваність зумовлена циклічним принципом дії багатьох механізмів, а стохастичність є наслідком випадкового характеру властивого всім параметрам елементів реальної системи – від похибок їх виготовлення та установки до флуктуацій товщини і в'язкості змазки, змін сил тертя, спонтанних змін навантаження, чи живлення впливом турбулентності зовнішніх потоків повітря на роботу турбіни і т. п. Оскільки поява дефектів приводить до нелінійності динамічних систем, то повторюваність і стохастичність виступають у властивостях коливань не незалежно, а у взаємодії, що проявляється у взаємній модуляції сигналів. Саме в характері такої взаємодії проявляються ті властивості коливного процесу, які в багатьох випадках є визначальними для встановлення стану досліджуваного об'єкта, що його породжує. Це робить діагностичні сигнали періодично нестационарними та складним об'єктом для аналізу [15-19], оскільки нестационарність, породжена дефектом на ранній стадії розвитку маскується

згаданими вище значно потужнішими, у тому числі нестационарними, складовими.

Діагностичні сигнали очевидно відображають процеси, котрі протікають у досліджуваній системі, тобто процеси є первинними при формуванні таких сигналів. Випадковий процес $\xi(t)$ згідно загальної класифікації може бути стаціонарним процесом, якщо його функція математичного сподівання $m = E\xi(t)$ та автокореляційна функція $b(u) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$ не залежать від часу t , та нестационарним у якого функція математичного сподівання $m(t) = E\xi(t)$ та автокореляційна функція $b(t,u) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$ залежать від часу t (тут E є знаком математичного усереднення).

Найбільш відповідними моделями для опису та аналізу складної взаємодії регулярних та стохастичних складових у складі діагностичних сигналів є періодичні та майже періодичні нестационарні випадкові сигнали, (далі ПНВС) [20–25]. Такі випадкові сигнали та їх математичні моделі (процеси) також відомі в літературі як циклостационарні [21, 22, 24, 26]. Перші роботи з розробки теоретичних моделей дослідження періодично нестационарних випадкових процесів (циклостационарних процесів, періодично корельованих випадкових процесів) були зроблені в працях Н. Hurd, W. Gardner, О. Коронкевича, Л. Гудзенко, Є. Гладишева, Н. Ogura, Я. Драгана, І. Яворського, Б. Марченка, М. Мисловича, Н. Шульженко, М. Приймака, Б. Яворського [20-44].

Підхід, що ґрунтується на моделях періодично корельованих випадкових процесах (ПКВП), був започаткований Я. П. Драганом та І. М. Яворським [20, 23, 27, 28] у Фізико-механічному інституті ім. Г.В. Карпенка НАН України спочатку для аналізу геофізичних процесів, а згодом розвинутий і апробований професором І. М. Яворським та його учнями для аналізу сигналів вібрації різноманітних механізмів та систем. У фундаментальній монографії І.М. Яворського [44] викладено основні принципи побудови кореляційних

моделей ПНВС. Дефекти обертових механізмів проявляються у структурі вібраційних сигналів як у генеруванні нових гармонічних складових, так і в складних взаємних модуляціях сигналів, у тому числі стохастичних сигналів різної природи. Імовірнісні характеристики ПНВС є носіями інформації про структуру таких сигналів, тому вони можуть використовуватися для діагностики як безпосередньо, так і бути основою для формування нових діагностичних ознак. Такі ознаки дають можливість виявляти дефекти вже на ранніх стадіях розвитку.

Важливими аспектами створення методології ранньої діагностики дефектів окрім встановлення факту наявності дефекту в системі є можливість його класифікації, локалізації та оцінювання. Тобто дефект повинен бути ототожнений з певним елементом чи процесом у діагностованій системі шляхом встановлення взаємозв'язків чи залежностей з певними відомими складовими моделі. Таку взаємозалежність з огляду на імовірнісну природу появи дефектів та присутність у діагностичному сигналі значних стохастичних складових очевидно слід шукати в кореляційних взаємозв'язках між складовими сигналу, позаяк саме кореляція є добре вивченою мірою лінійної схожості випадкових процесів і можливе використання розробленого підходу ПКВП до аналізу ПНВС. Отже для вирішення поставленої задачі повинна бути розроблена кореляційна модель ПНВС та розроблені відповідні методи аналізу кореляційних параметрів ПНВС, що дозволить створити відповідну методологію.

На даний час існують дві основні групи широко використовуваних підходів до аналізу ПНВС. Перш за все слід відмітити “класичний” підхід, котрий називають методом “обвідної”, що зводиться до прямого детектування сигналу і дослідження виділеної низькочастотної складової методами Фур'є-аналізу чи виділення так званого “квадрату обвідної” і дослідження його Фур'є-спектру. Основні принципи такого підходу викладено у [45-47]. На рис. 1.2.1 показано принцип, що лежить в основі такого аналізу діагностичного вібраційного [45]. На рис. 1.2.2 наведено структурну схему аналізу вібраційного

сигналу підшипника кочення методом визначення “обвідної” [47]. На рис. 1.2.3 наведено приклади сигналів [45] для ключових кроків аналізу цією методологією. В кінцевому випадку аналізується спектральний склад виділеної обвідної на предмет наявності у ньому гармонік частоти яких відрізняються на величину частоти обертанні валу приводу механізму. Цей підхід є найдавнішим, найпростішим і досі широко використовується у різних варіантах – прямого детектування, пошуку та виділення “інформаційної смуги частот” різними методами у тому числі застосування ексцесу (“спектрального ексцесу”) випадкового сигналу, виділення модуля аналітичного сигналу чи квадрату модуля аналітичного сигналу з використанням перетворення Гільберта, та ряду інших варіантів [42, 43, 45, 46].

Основним недоліком цих методів є той, що обробка сигналу ведеться без врахування взаємкореляційних зв’язків між різними його складовими. Іншою групою методів обробки сигналу ПНВС є використання перетворення Гільберта для демодуляції сигналу. Суттєвою перевагою цього підходу є можливість аналізу усіх видів модуляцій несучої – амплітудної, частотної та фазової а також їх ефективне розділення [48-58]. Однак часте нехтування відомими суттєвими обмеженнями у застосуванні перетворення Гільберта до обробки модульованих сигналів сформульованих теоремами Бедрояна та Натталла [48, 49] призводить як до помилок при виявленні дефектів так і до суттєвих похибок при їх класифікації та оцінюванні ступеня розвитку.

Ще одна широко використовувана група методів базується на попередній декомпозиції діагностичного нестационарного сигналу емпіричними методами на ряд вузькосмугових так званих “функцій власних мод” та застосуванні перетворення Гільберта для аналізу структури кожної з цих мод окремо [50, 51]. При цьому для власне декомпозиції мод використовують різні варіанти емпіричного методу декомпозиції (EMD) Гільберта-Хуанга [52, 53], спеціально створеного у NASA для аналізу нестационарних нелінійних сигналів морського хвилювання.

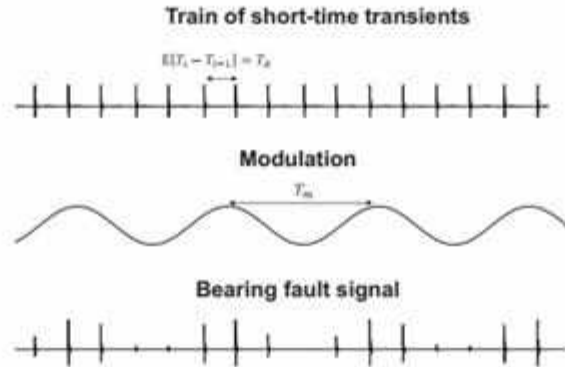


Fig. 3. An illustration of the vibration signal emitted by an incipient fault in a REB: (a) pseudo-periodic train of transients, (b) modulation and (c) the resulting REB signal.

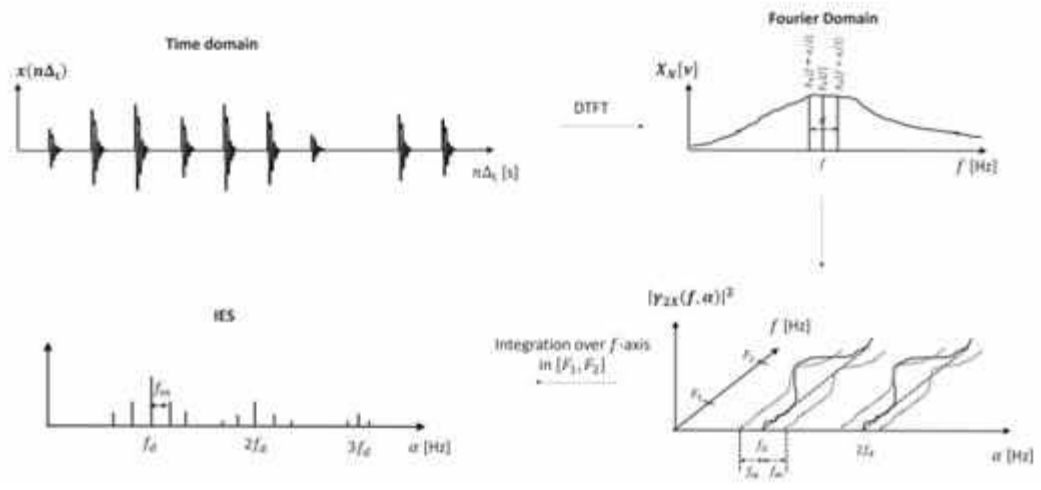


Рис. 1.2.1 – Принцип аналізу діагностичного сигналу методом “обвідної” [45]

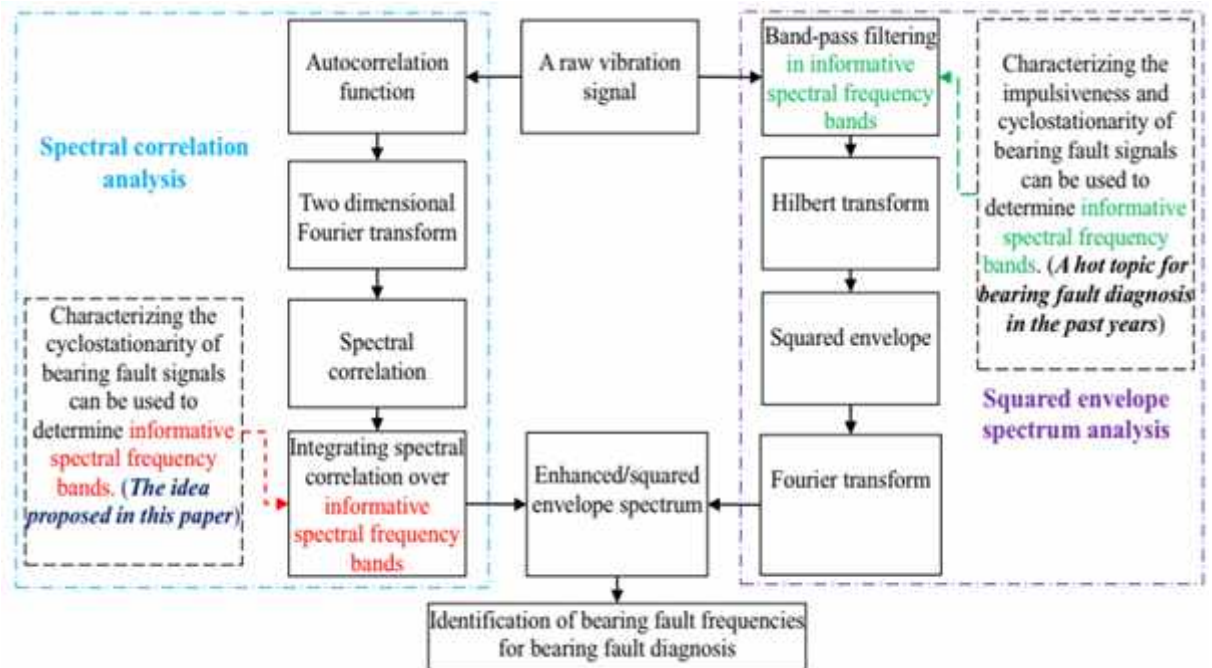


Рис. 1.2.2 – Структурна схема аналізу сигналу методом визначення “обвідної” [47].

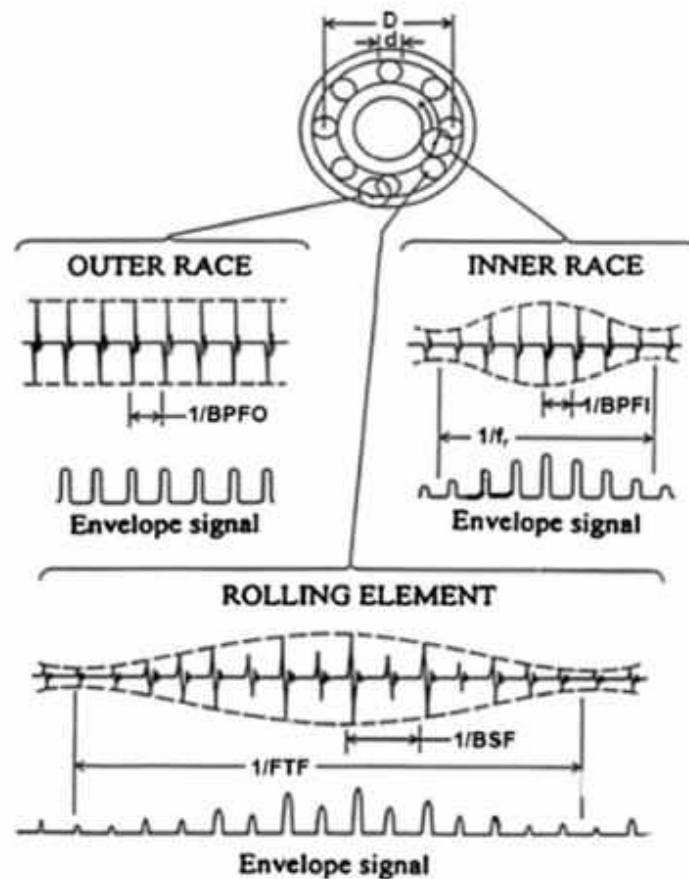


Рис. 1.2.3. Вигляд сигналів для ключових кроків аналізу методом “обвідної” [45].

Цей емпіричний метод передбачає циклічну процедуру аналізу сигналу з виділенням та відніманням від сигналу “мод середнього рівня” аж доти, поки залишок не буде чисто стохастичним. Різниця між різними варіантами реалізації методу зводиться переважно до використання різних критеріїв зупинки при виділенні мод та методів інтерполяції сигналу між піками (крім оригінального методу кубічного сплайна запропонованого Хуангом). На рис. 1.2.4 наведено приклад діагностичного вібраційного сигналу та результат його декомпозиції [54]. Застосування перетворення Гільберта дозволяє суттєво розширити можливості аналізу діагностичного сигналу за рахунок аналізу миттєвих значень амплітуди, фази та частоти мод [55–58].

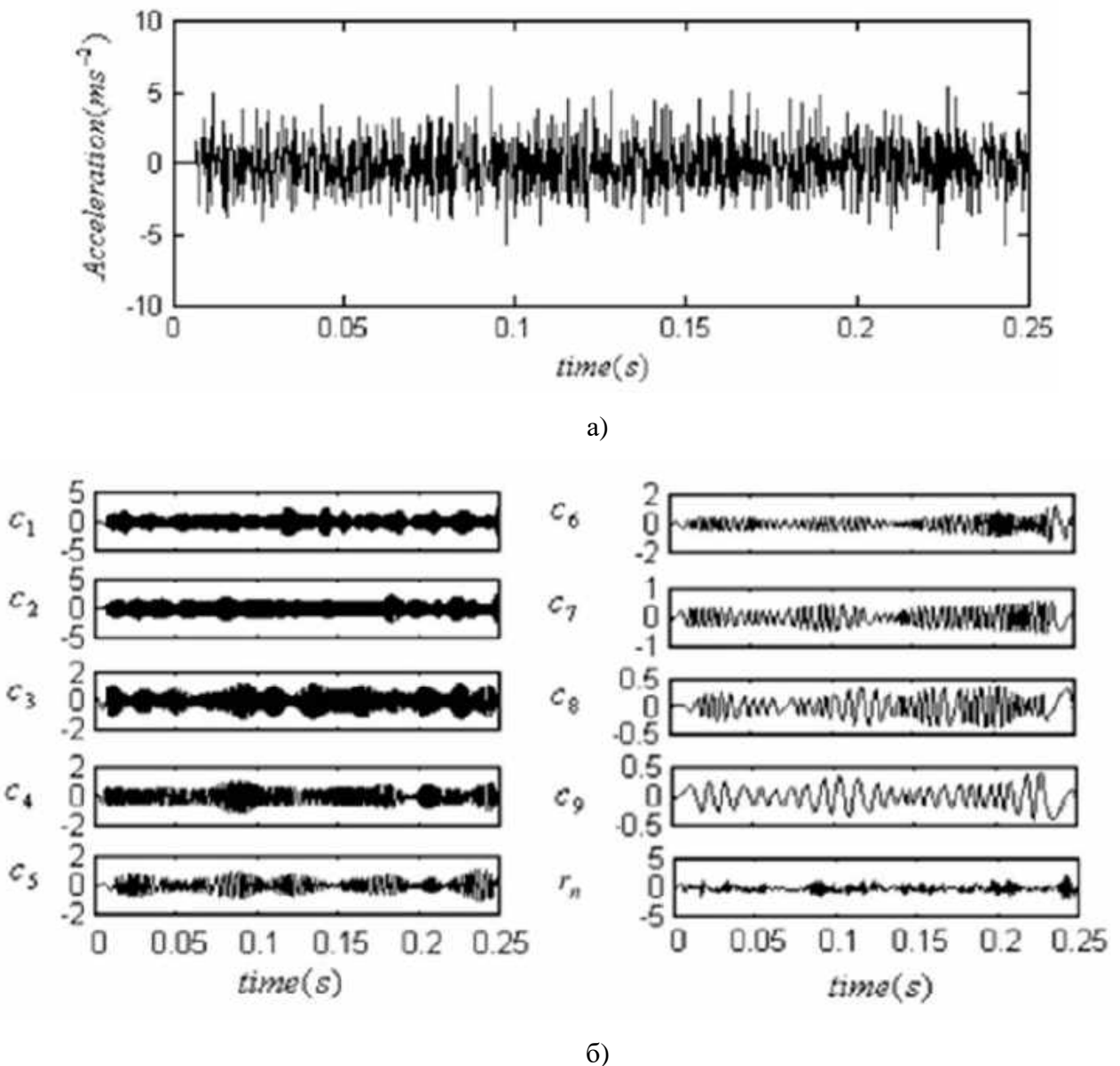


Рис. 1.2.4. Приклад діагностичного сигналу віброприскорення (а) та результат його декомпозиції – дев'ять вузькосмугових мод і залишок (б) [54].

Суттєвим недоліком таких методів є емпіричний характер процедур декомпозиції діагностичного сигналу. Незважаючи на широке застосування методу Гільберта-Хуанга для обробки нестационарних сигналів різної природи він досі не має теоретичного обґрунтування. Основними проблемами, котрі обмежують коректне використання перетворення Гільберта є наявність у структурі діагностичного сигналу потужних шумових складових та значна глибина взаємних модуляцій сигналів, котрі призводять до суттєвих похибок

унаслідок нехтування вимогами теорем Бедрояна та Натталла [48, 49]. Використання різного роду емпіричних процедур прийнятих без належного теоретичного обґрунтування призводить до зниження ефективності (перш за все чутливості) діагностичних методів, що критично для діагностики дефектів на ранніх стадіях розвитку.

Таким чином, проблема побудови моделі та методики аналізу періодично нестационарного випадкового сигналу у діагностиці залишається актуальною і потребує свого вирішення.

1.3. Висновки до розділу 1.

У розділі 1 наведено основні поняття та означення, що використовуються в галузі технічної діагностики і показано місце та роль технічної діагностики як частини більш загальної структури підтримки життєвого циклу систем. Відсутність стандартного означення ранньої стадії розвитку дефектів, коли контрольовані параметри вузлів діагностованої системи ще не виходять за межі встановлених допусків а розвиток дефектів на ранній стадії ще не призводить до стандартних симптомів виявлення несправностей у діагностованих системах є важливим фактором, що стримує розвиток методології аналізу ранніх стадій розвитку дефектів. Сучасні методи обробки та аналізу діагностичних сигналів ґрунтуються на нестационарних нелінійних моделях сигналів з складними взаємними модуляціями та їх демодуляції з використанням різноманітних, найчастіше емпірично введених процедур декомпозиції діагностичного сигналу. Використання підходу з перетворенням Гільберта та побудови аналітичного сигналу як найбільш ефективних засобів для демодуляції складно модульованих сигналів обмежується присутністю потужних шумових складових у сигналі та значними взаємними модуляціями регулярних і стохастичних складових. Його коректне застосування для виявлення у складі ПНВС сигналів від дефектів на ранніх стадіях розвитку вимагає відповідного теоретичного аналізу процесів декомпозиції сигналу.

РОЗДІЛ 2

ПОВЕДІНКА НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТА ДІАГНОСТИЧНІ СИГНАЛИ НА РАННІХ СТАДІЯХ ЗАРОДЖЕННЯ І РОЗВИТКУ ДЕФЕКТІВ

2.1. Сучасні моделі систем з дефектами.

Моделі діагностичних сигналів для виявлення та оцінювання дефектів на ранніх стадіях розвитку, що виникають і розвиваються у складних динамічних системах спираються на сутність, тобто на природу та моделі власне самих систем. Сучасні обширні огляди моделей систем виконані в роботах [59–61]. У найбільш загальній класифікації моделі поділяються на лінійні та нелінійні. Для лінійних моделей систем давно існує добре розвинута методологія їх аналітичного аналізу, котра дозволяє визначати параметри складових частин на основі аналізу сигналів в системі у [59, 61]. Проте, у межах лінійної моделі унаслідок її основних властивостей в принципі неможливо описати чи представити окремий процес зародження і розвитку дефекта як нової сутності. Дефект у лінійній моделі системи може бути внесений і розглядатися як частина такої моделі з певними незалежними характеристиками, котрі представлені параметрами самої моделі. Такі моделі [62] відомі, і широко використовуються в діагностиці. Суттєвими недоліками лінійних моделей систем для виявлення дефектів на ранніх стадіях розвитку є:

1. Дефект вводиться як частина моделі і інтерпретується в його класичному “статичному” означенні [62-64] як певне перевищення відхилення одного чи декількох контрольованих параметрів системи в цілому чи певних її елементів від заданих нормативних рівнів. Це унеможлиблює достовірну класифікацію та моніторинг розвитку дефекту, оскільки компонента параметрів, що моделює дефект є незмінною.

2. Складність, і часто неможливість достовірного виявлення дефектів на ранніх стадіях їх розвитку, оскільки відхилення параметрів, що зумовлені зародженням та розвитком дефекту як правило не перевищують задані нормативні допуски на параметри для складових діагностованої системи, хоча дефект в системі уже присутній і розвивається. Вплив дефекту на ранніх стадіях його розвитку на діагностичний сигнал є відносно малий і маскується впливом відхилень інших параметрів у межах дозволених нормативів, що утруднює достовірне виявлення сигналу дефекту та його оцінювання на основі аналізу діагностичного сигналу.

Таким чином, питання виявлення дефектів на ранніх стадіях їх розвитку перш за все стикається з проблемою означення самого дефекту для процесу діагностування – процесу його зародження дефекту та його оцінювання на ранніх стадіях розвитку. Стандартне означення дефекту [62-64] передбачає наявність певного, досить розвиненого пошкодження чи, більш загально, – відхилення певного контрольованого параметра чи параметрів принаймні одного з елементів системи поза межі заданого порогового рівня.

Однак, у реальних системах, навіть найпростіших та з високим ступенем досконалості, завжди існують певні дефекти чи їх зародки, параметри котрих не виходять за задані порогові рівні. З іншої сторони, навіть окремий вузол чи деталь також не передбачає контролю абсолютно всіх параметрів (оскільки це економічно недоцільно), тобто далеко не всі параметри контролюються. У реально функціонуючій системі в межах заданих нормативних навантажень (функціональних обмежень робочих параметрів) неможливо достовірно передбачити місце, час, тип і природу зародження дефекту. Це імовірнісний процес, котрий технічно визначається цілим рядом часових імовірнісних показників: строком служби (при заданій імовірності відмови), напрацюванням на відмову, та рядом інших параметрів котрі залежать також від умовного “навантаження” чи інтенсивності функціонування системи відомого також як заданий “коефіцієнт навантаження” що використовується при розрахунках імовірності безвідмовної роботи технічних систем.

Нелінійні моделі складних динамічних систем [59-61] в принципі дозволяють описати появу нових сутностей, котрі попередньо не закладені в їх структуру, однак їх аналітичний аналіз є суттєво складніший і не завжди в принципі можливий.

2.2. Синергетичні моделі нелінійних динамічних систем з дефектами.

На тепер існує певний напрямок в теорії аналізу поведінки складних динамічних нелінійних систем, що спрямований на дослідження умов та характеру виникнення у них нових сутностей – синергетика. Математичний апарат синергетики досліджує переходи між різними стійкими станами у складних нелінійних динамічних системах що уможливорює аналітичне (за певних спрощень) дослідження динаміки поведінки складних нелінійних систем, у тому числі передбачення появи нових сутностей за певних умов накладених на структуру та функціонування такої системи. Основоположником цієї теорії був Хакен [65-69]. Такий підхід називається синергетичним підходом до аналізу складних динамічних систем і застосовується до досить широкого класу систем, у тому числі систем з самоорганізацією [66]. Гранична точка переходу між стійкими станами нелінійної динамічної системи, тобто момент появи нової сутності в такій системі називається точкою біфуркації [65-70].

Найпростішими прикладами таких систем є наприклад система, що описується диференціальним рівнянням виду [66] права частина якого є нелінійною функцією змінних системи

$$\dot{q}_1 = \alpha q_1 + \beta q_1 q_2,$$

де β описує зв'язок між системами q_1 і q_2 та є так званим “керуючим параметром”, або двомірна планарна система з одним “керуючим параметром” α [67]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_1(x_1^2 + x_2^2) - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) + \alpha x_2. \end{cases} \quad (2.1)$$

В полярній системі координат (ρ, θ) така система має вигляд [67]:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Оскільки рівняння для ρ і θ у системі (2.2) є незалежними, то просто отримуються фазові портрети поведінки системи у фіксованому околі початку координат (Рис. 2.1) [67], який, очевидно, є єдиною точкою рівноваги (точкою біфуркації Андронова-Хопфа) в системі. Аналіз такої системи [67] показує, що стан системи залежить від величини α - параметра біфуркації. Для $\alpha \leq 0$ рівновагою є стабільний фокус, оскільки $\dot{\rho} < 0$ і $\rho(t) \rightarrow 0$, починаючи з будь-якої початкової точки. З іншого боку, якщо $\alpha > 0$, маємо $\dot{\rho} > 0$ для малих $\rho > 0$ і $\dot{\rho} < 0$ при достатньо великому ρ рівновага стає нестійкою. З (2.2) видно, що система має періодичну орбіту для будь-якого $\alpha > 0$ радіусом $\rho_0 = \sqrt{\alpha}$. Більше цього, ця періодична орбіта є стабільною, оскільки $\dot{\rho} > 0$ всередині циклу і $\dot{\rho} < 0$ поза циклом [67].

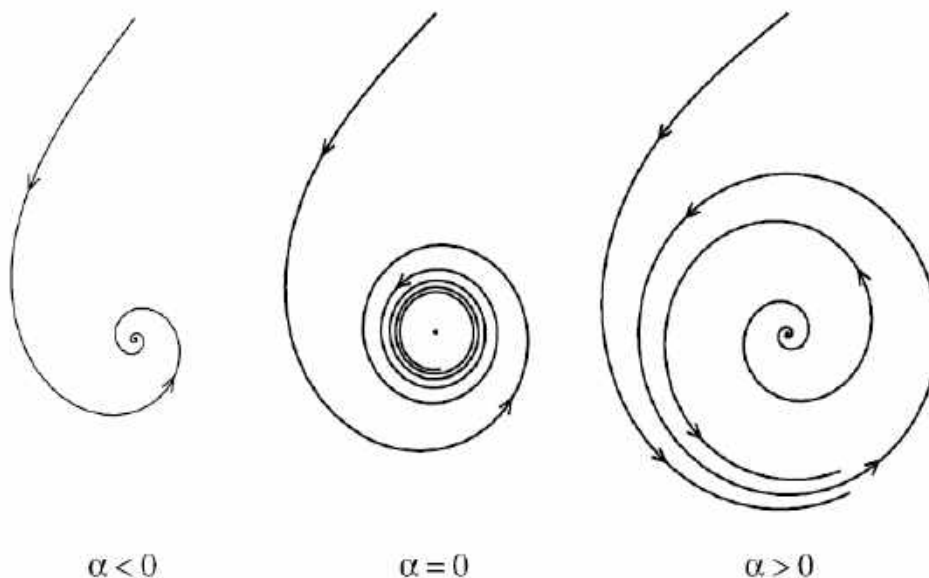


Рис. 2.1. Біфуркація Андронова-Хопфа для системи виду (2.2) в околі точки початку системи координат [67].

Точка $\alpha = 0$ (Рис. 2.1) є точкою біфуркації. Коли величина α не дорівнює нулю, в системі (2.1) відбувається біфуркація, яку називають біфуркацією Андронова-Хопфа. Це призводить до виходу системи зі стану рівноваги і появи періодичних коливань з певною амплітудою [67].

Під біфуркацією у нелінійній динамічній системі розуміється виникнення точки переходу до нової сутності – що супроводжується новим, як правило коливним процесом [67, 72].

Наприклад, скалярна одновимірна система виду [67]:

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 \quad (2.3)$$

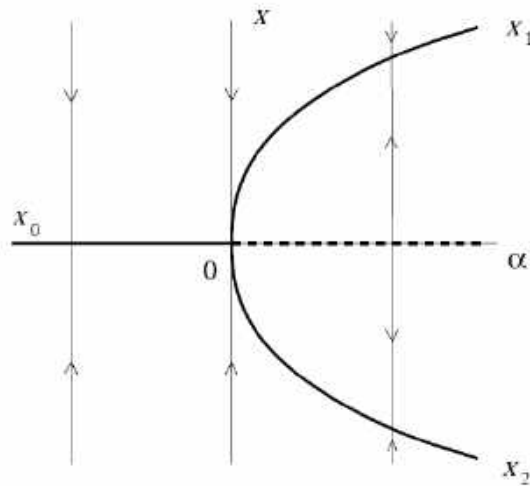
має точку рівноваги $x_0 = 0$ для будь-яких значень параметра α . Ця рівновага є стійкою при $\alpha < 0$ і нестійкою при $\alpha > 0$ (α — власне значення точки рівноваги). Для величин $\alpha > 0$ існують дві додаткові точки рівноваги, що розгалужуються від початку координат, а саме, $x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$, які є стабільними (Рис. 2.2), тобто в системі мають місце коливання між цими точками рівноваги.

Рівновага в системі залежно від “керуючого параметру” α є лінійно стійкою, якщо $\alpha < 0$, тобто система залишається стабільною, але вже нелінійною при $\alpha = 0$ (коли швидкість збіжності до нуля розв’язку системи нелінійних диференціальних рівнянь більше не є експоненціальною), і стає лінійно нестійкою при $\alpha > 0$.

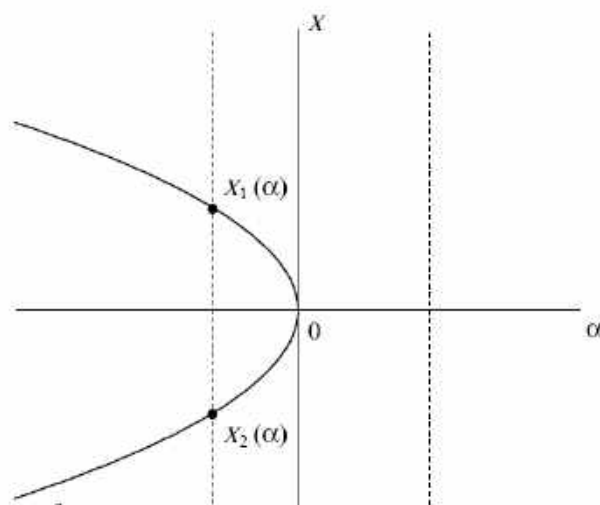
Розрізняють два типи біфуркацій Хопфа. Біфуркацію в системі називають докритичною при $\alpha < 0$, оскільки цикл присутній “перед” біфуркацією. Біфуркацію в системі називають закритичною, оскільки цикли коливань існують при додатних значеннях параметра $\alpha > 0$ “після” біфуркації. Ця термінологія очевидно залежить від обраного напрямку зміни контролюючого параметра. В обох випадках ми маємо втрату стійкості рівноваги в системі при відході від граничної точки – точки біфуркації при $\alpha = 0$.

Для випадку $\alpha < 0$ стійка рівновага у найпростішому випадку замінюється стійким граничним циклом малої амплітуди. Таким чином, система

“залишається” в околиці точки рівноваги, і ми маємо “м’яку” або некатастрофічну втрату стійкості в системі. У випадку $\alpha > 0$ точка рівноваги обмежена нестабільним циклом, система “виштовхується” з околиці точки рівноваги, що призводить до різкої або катастрофічної втрати стабільності, тобто система переходить в нову якість. Якщо система м’яко втрачає стабільність, вона добре “керована”: і з наближенням α до нуля, система повертається до стійкої рівноваги. Навпаки, якщо система різко втрачає стійкість, зменшення α до нуля чи навіть негативного значення не обов’язково повертає її до стабільного стану [67, 71], оскільки може відбутися вихід за межі стабільності (Рис. 2.3).



а)



б)

Рис. 2.2 – Біфуркації Хопфа в одновимірній динамічній нелінійній системі (а) закритична область обмежена кривою в півплощині $\alpha > 0$), (б) – докритична область обмежена кривою в півплощині $\alpha < 0$ [67].

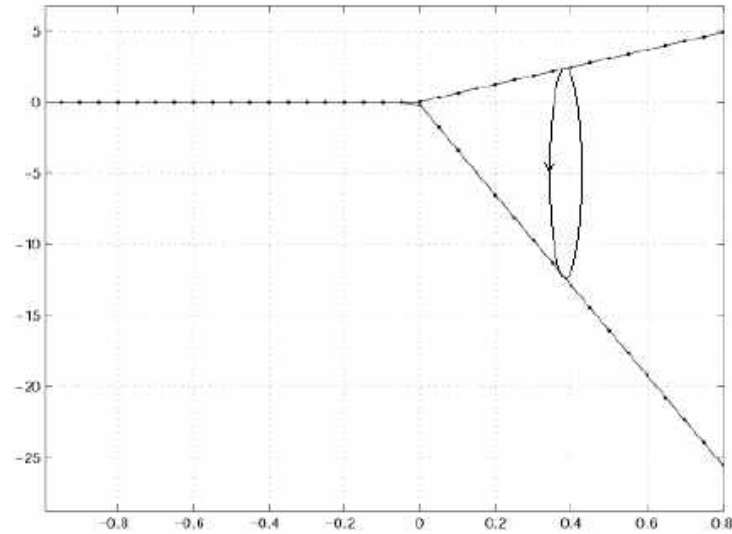


Рис. 2.3. Закритична біфуркація Хопфа в плоскій нелінійній динамічній системі. Амплітуда коливань лінійно залежить від величини контролюючого параметра [72].

Розвиток процесів у нелінійній динамічній системі може також іти по шляху так званих “каскадних” біфуркацій [67, 73–75] коли розвиток закритичної біфуркації супроводжуються кратним помноженням циклів в системі. Наприклад для моделі у вигляді популяції Рікера [67]:

$$x_{k+1} = \alpha x_k e^{-x_k}$$

існує набір критичних параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ [67], що супроводжуються послідовними каскадними біфуркаціями як показано на Рис. 2.4.

Для нелінійної динамічної системи виду [74]:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \dot{x} = ky - x^3 + 3x - \lambda, \\ \dot{y} = x + z - 2y, \\ \dot{z} = \varepsilon_2 (y - z). \end{cases}$$

при $\varepsilon_1 = 0.1, \varepsilon_2 = 1, \lambda = 10$ маємо наступну реакцію системи (Рис. 2.5) [74].

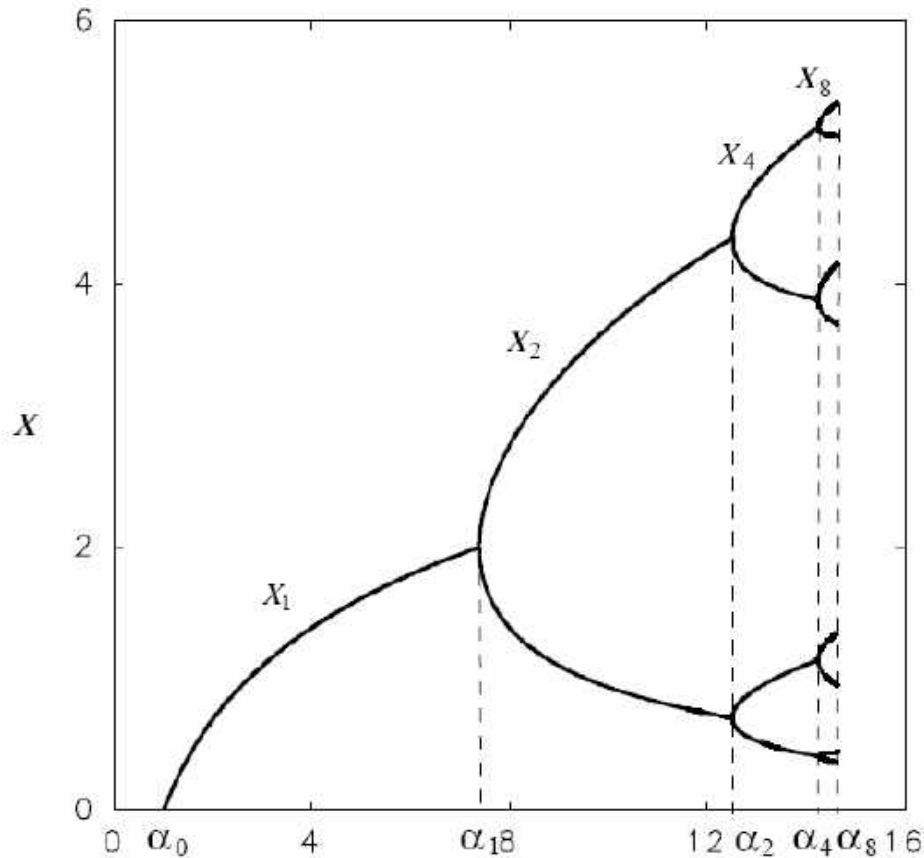


Рис. 2.4 Каскадні біфуркації як розвиток закритичної біфуркації що супроводжуються кратним помноженням циклів та частот коливань в системі [67].

Сценарії виникнення та розвитку біфуркацій за умови швидких змін параметрів у системах проаналізовані у [75]. У випадку динамічної системи з швидко змінними параметрами змінюється швидкість (частота) коливань точки біфуркації [75]. При малих величинах збурень якщо їх середнє рівне нулю ці зміни є незначними, при значних величинах збурень частота коливань може суттєво змінитися [75]. Сценарії виникнення та розвитку біфуркацій за умови нормальних та повільних змін параметрів у системах з багатьма ударами проаналізовані у [76]. Оцінювання максимального числа малих амплітудних граничних циклів, які можуть ефективно роздвоюватися від сингулярної точки шляхом варіювання параметрів у сімействі розглянутих векторних полів проведено у [77].

Поведінка систем з сингулярними біфуркаціями Хопфа розглянута у [74, 78]. Біфуркаційні діаграми у сингулярно збуреній системі проаналізовано у [79]

Приклад поведінки нелінійної системи (мішаних коливань) за сингулярної біфуркації Хопфа наведено на Рис. 2.5.

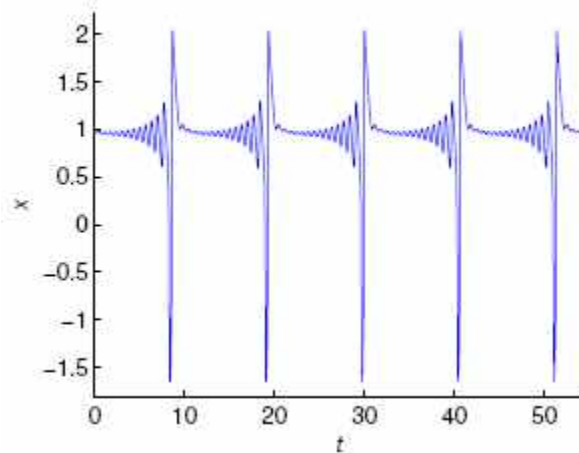


Рис. 2.5. Мішані коливання що виникають в системі за сингулярної біфуркації Хопфа [74].

Точка біфуркації може супроводжуватися за певних умов та параметрів моделі виникненням та розвитком певних нових динамічних процесів в нелінійній системі [68, 75]. Детальний теоретичний аналіз можливих сценаріїв розвитку системи з точки біфуркації проведено у роботах [68, 80-85]. Дослідження різних варіантів синхронізації коливань у нелінійній системі з часовими затримками розглянуто у [86]. Дослідження ефектів синергії у складних багатоелементних стохастичних системах розглянуто у [87].

Дослідження появи та стабільність прихованих атракторів що виникають унаслідок прихованих коливань у нелінійних динамічних системах проаналізовано на основі синергетичного підходу у роботах [88-91]. Зокрема, у цих роботах доведено, що приховані коливання в нелінійній динамічній системі можуть призводити до появи самозароджуваних прихованих стохастичних атракторів, тобто генерувати нові стійкі стани в системі. Таким чином, зародження нових сутностей (у тому числі дефектів) в нелінійній динамічній системі має хаотичну природу, що супроводжується виникненням прихованих коливань.

Теоретичний аналіз динаміки поведінки нелінійних динамічних систем показує, що біфуркації не обов'язково призводять до появи нових коливних процесів у системі [66, 67, 79], тобто не кожне відхилення чи збурення обов'язково призводить до розвитку дефекту. Стабільність нелінійних динамічних систем поблизу точки біфуркації розглянута у [85, 86]. Чутливість нелінійної динамічної системи до виникнення у ній біфуркацій залежить окрім структури самої системи та її параметрів також від ряду зовнішніх факторів, у тому числі від шумів, котрі внесені в систему [72, 85, 86, 92].

Одночасно з одинарними або подвійними біфуркаціями Хопфа стабільний біфуркаційний періодичний рух, створений біфуркаціями Хопфа, може взаємодіяти з періодичним збудженням нелінійної системи, представленими в нелінійних осциляторах із затримкою часу (неавтономні нелінійні системи із затримкою часу) [93]. За певних співвідношень частоти біфуркації Хопфа і частоти збурення можуть з'являтися декілька типів резонансів як реакція нелінійних осциляторів із затримкою часу з періодичним збудженням (тобто неавтономних нелінійних систем із затримкою часу). Наприклад, первинний і вторинний резонанси можуть виникати в невеликій області одиничних біфуркацій Хопфа, а комбіновані резонанси можуть з'являтися у вимушеному відгуку поблизу нерезонансних подвійних біфуркацій Хопфа [93].

За умов проходження точки біфуркації у нелінійних динамічних системах з затримкою в часі при наявності зовнішнього збурення вони можуть взаємодіяти, унаслідок чого виникають та одночасно співіснують неявні поліперіодичні коливання різного спектрального складу, причому коливання низької (докритичні біфуркації) та високої (закритичні біфуркації) інтенсивностей – мають різний спектральний склад [93]. Ці резонанси називають неявними, оскільки вони не є власними резонансами нелінійної динамічної системи. При цьому можуть спостерігатися коливання (резонанси) як з певною власною частотою біфуркацій так і коливання з кратними та дробовими значеннями цієї частоти і коливання з комбінаційними частотами.

Наприклад, для квадратичного нелінійного осцилятора зі зворотнім зв'язком, що описується рівнянням виду [93]:

$$U(x) = px(t - \tau) + q\dot{x}(t - \tau) + k_1x^2(t - \tau)$$

в системі збуджуються приховані коливання (Рис. 2.5) [93].

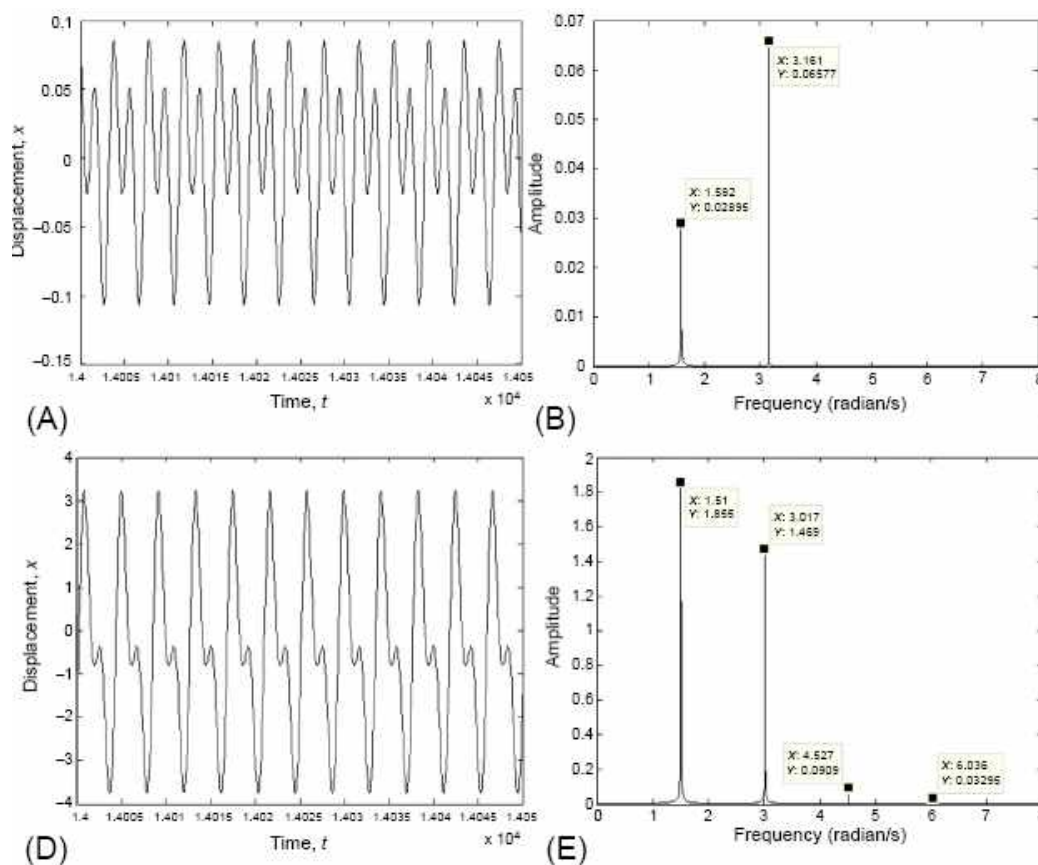


Рис. 2.5 Приклад прихованих коливань у нелінійній динамічній системі та їх спектри Фур'є – докритичні (верхній ряд: А, В) та закритичні (нижній ряд: D, E) [93].

У нелінійній динамічній тривимірній системі виду [94]:

$$\begin{cases} \dot{x} = (z + \mu_1)x - \omega y, \\ \dot{y} = \omega x + (z + \mu_1)y, \\ \dot{z} = \mu_2 + \mu_3 z - z^3 + k(x^2 + y^2), \end{cases}$$

в околі точки з координатами $x(0) = 0,1; y(0) = 0,1; z(0) = 0,1$ за величин параметрів $k_1 = 1,0; \mu_1 = -0,2; \mu_2 = 0,4; \mu_3 = 1,0$ виникають ударні коливання

(Рис. 2.6, [94]). Тобто у нелінійних динамічних системах при збуренні в околі точки біфуркації спостерігається широкосмуговий дискретний лінійчастий спектр коливань з різними, у тому числі некрратними частотами. Цей спектр за певних умов може бути також і неперервним стохастичним. Загалом поведінка динамічної нелінійної системи в точці біфуркації Хопфа характеризується сплеском стохастичного широкосмугового процесу [72, 95, 96].

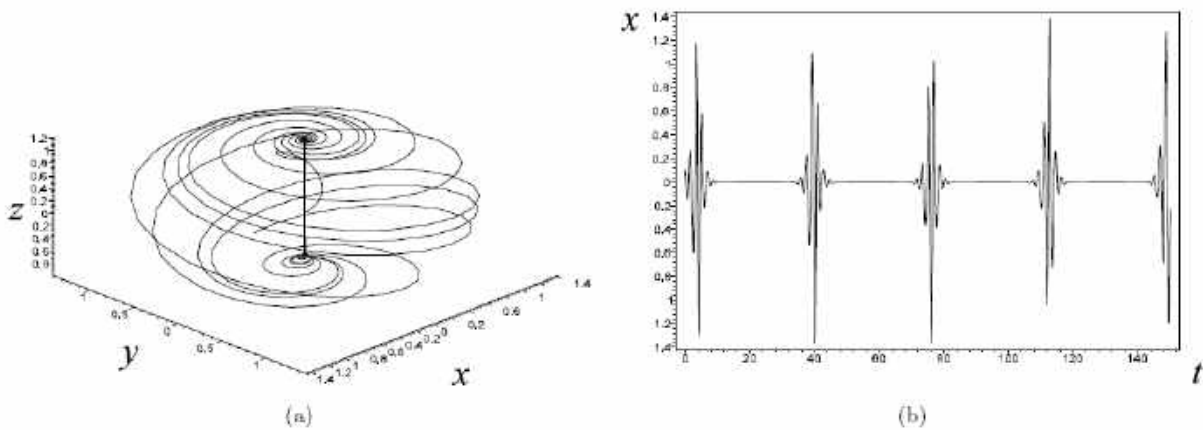


Рис. 2.6. Приклад “ударних” коливань в тривимірному просторі станів за біфуркації Хопфа (а), та графік поведінки змінної x від часу t (б) [94].

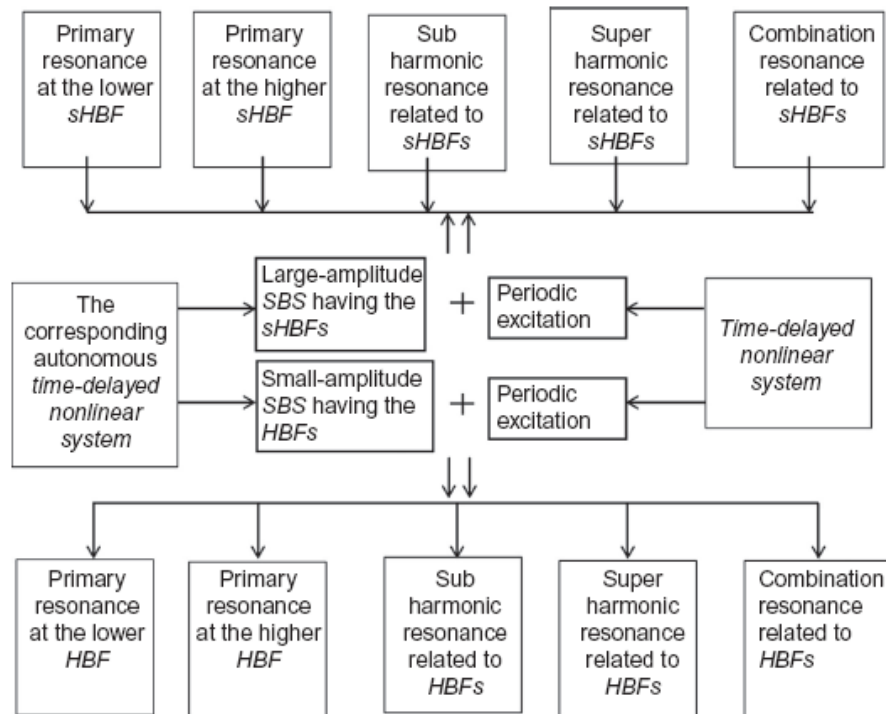


Рис. 2.7. Схема можливих співіснуючих сімейств неявних резонансів у неавтономних нелінійних системах із затримкою часу [93].

На Рис. 2.7. Наведена схема п'яти можливих співіснуючих сімейств неявних резонансів у неавтономних нелінійних динамічних системах із затримкою часу [93].

У [97] проведений аналіз моделі динаміки поведінки пари тертя, що описується рівнянням:

$$\dot{z} = \dot{x} \left(1 - \text{sign}(x) \frac{\dot{z}}{\delta} \right)$$

показав зародження та розвиток малоциклових коливань точок біфуркацій, котрі перериваються шумоподібними ділянками (Рис. 2.8).

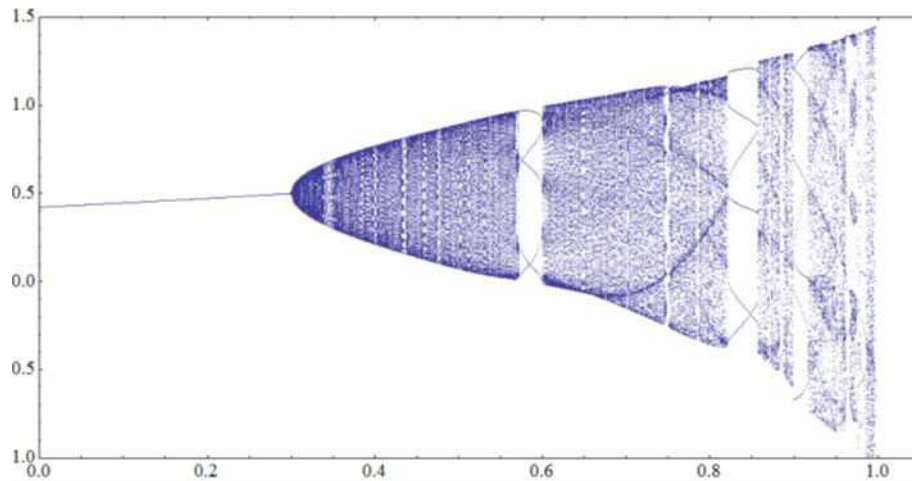


Рис. 2.8. Чергування виникнення біфуркацій та хаотичних коливань у нелінійній динамічній системі з тертям що призводить до ковзання [97].

Аналіз виникнення біфуркацій Хопфа унаслідок наявності шуму [98] показав квадратичну залежність амплітуди коливань від шуму (Рис. 2.9), а також ствердив той факт, що (на відміну від відомого явища стохастичного резонансу) наявність коливних станів у нелінійній динамічній системі до появи шуму не є обов'язковою умовою появи коливань унаслідок шуму. Причому, якщо у випадку малих шумів і докритичної біфуркації Хопфа спостерігатиметься наведений шумами коливний процес, то у випадку великої потужності шумів і закритичної біфуркації Хопфа спостерігатиметься коливний процес модульований шумом. Окрім чисто "гладких" [28] (Рис. 2.3, 2.4, 2.10) біфуркацій, коли в системі виникають циклічні коливання однієї частоти

можливі також “стрибаючі” [96] біфуркації (Рис. 2.11, 2.12), коли циклічні коливання перериваються періодами хаотичних стохастичних стрибків амплітуди (ударами), котрі часто супроводжуються розгалуженнями, з появою інших мод коливань з іншими амплітудами і частотами, тобто є періодично нестационарними.

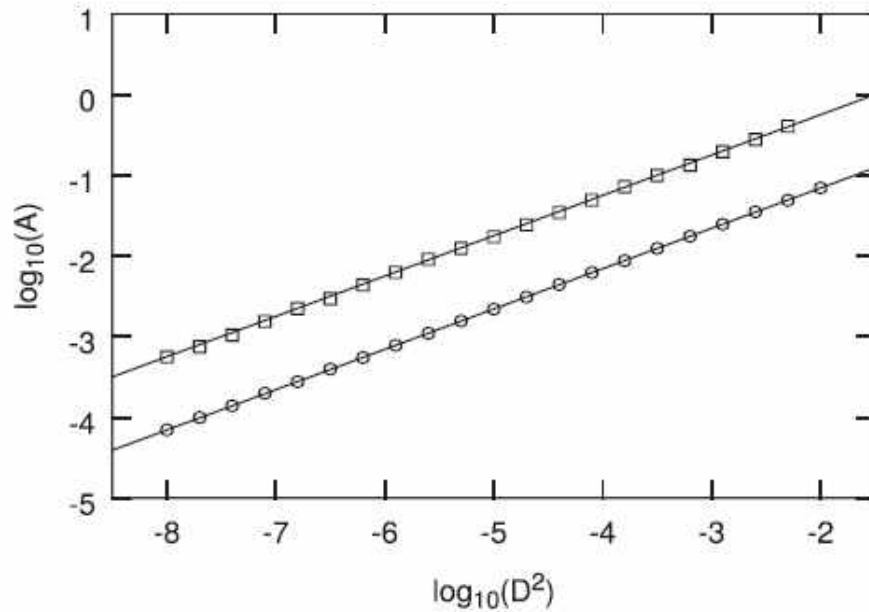


Рис. 2.9. Залежність амплітуди наведеного коливного процесу від потужності шуму для закритичних (квадрати) і докритичних (кола) біфуркацій [97].

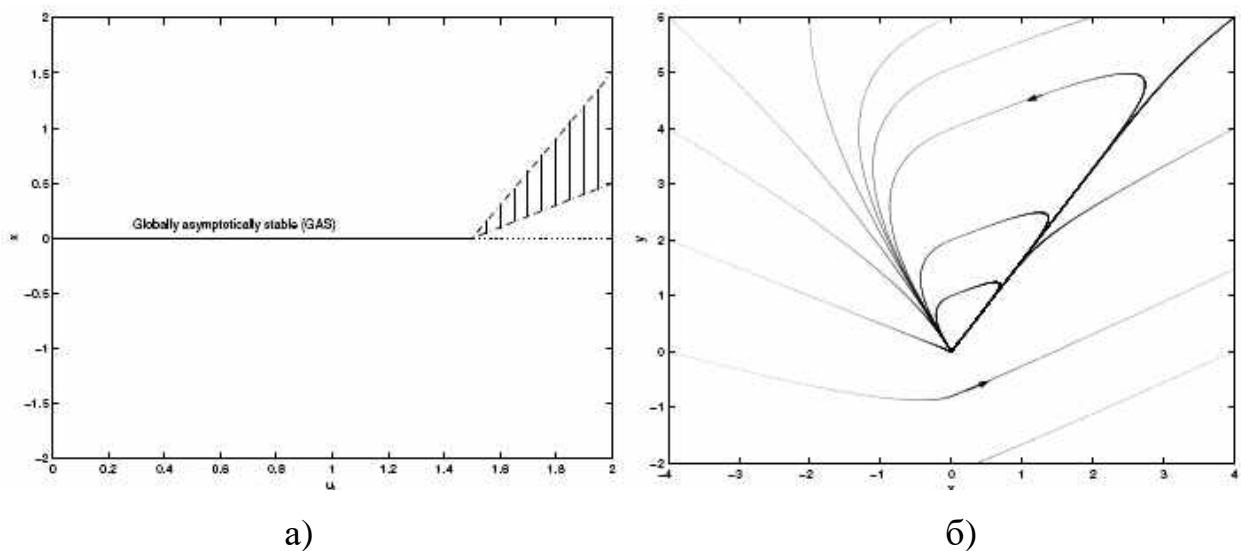


Рис. 2.10 Біфуркаційна діаграма, що показує наявність континууму гомоклінічних орбіт (а), і фазовий портрет, що відповідає значенню параметра з континуумом гомоклінічних орбіт (б) [72].

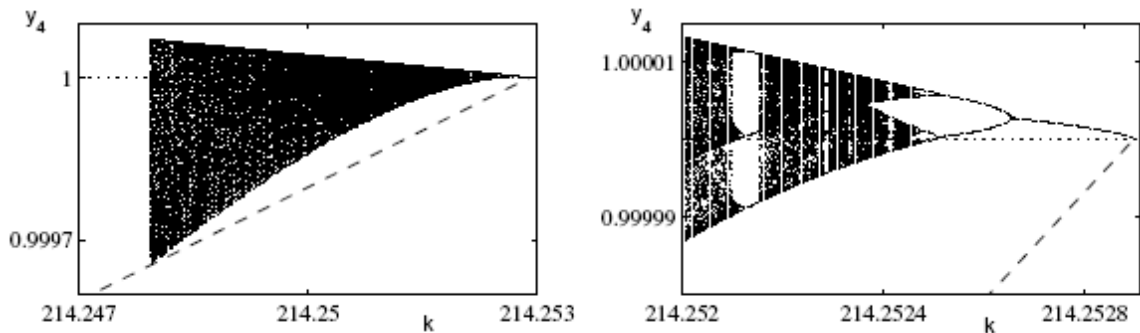


Рис. 2.11 Біфуркаційні діаграми з послідовним збільшенням шкали параметра. Чітко видно шумові “доріжки” що передують наступним розгалуженням з стабільними та квазістабільними коливаннями [72].

Локальна стабільність точок біфуркацій в нелінійних системах, умови виникнення генеративних, осцилюючих дегенеративних біфуркацій Хопфа, режими та умови перемикання стабільності, спіральна стабільність біфуркацій та однокрокові та двокрокові локальні осциляційні біфуркації у дискретних системах детально розглянуті у [98].

Зокрема, теоретичний динамічний аналіз, проведений на основі синергетичного підходу до нелінійних динамічних моделей “класичних” механізмів – пари вал/підшипник, зубчатої пари та пари тертя проведений відповідно у [96, 99, 100] показав, що при проходженні точки біфуркації у динамічній системі можуть виникати широкосмугові стохастичні поліперіодичні коливання з частотами як кратними частоті збурення, так і частотами нижчими частоті збурення, кратними частоті збурення і комбінаційними частотами. Спектральний склад таких коливань близький до лінійчатого. Тут слід зазначити, що коливні процеси з схожими параметрами є характерними для діагностичних сигналів у динамічних системах з дефектами.

У [72] показано, що для біфуркацій у негладкій динамічній системі, котра у найпростішому випадку описується рівнянням виду:

$$\dot{x} = \alpha \text{sign}(X(t))$$

у випадку ударного збурення має місце мішана реакція системи, котра у тому числі має значні шумові фрагменти та стрибкоподібні зміни амплітуд коливань (Рис. 2.12).

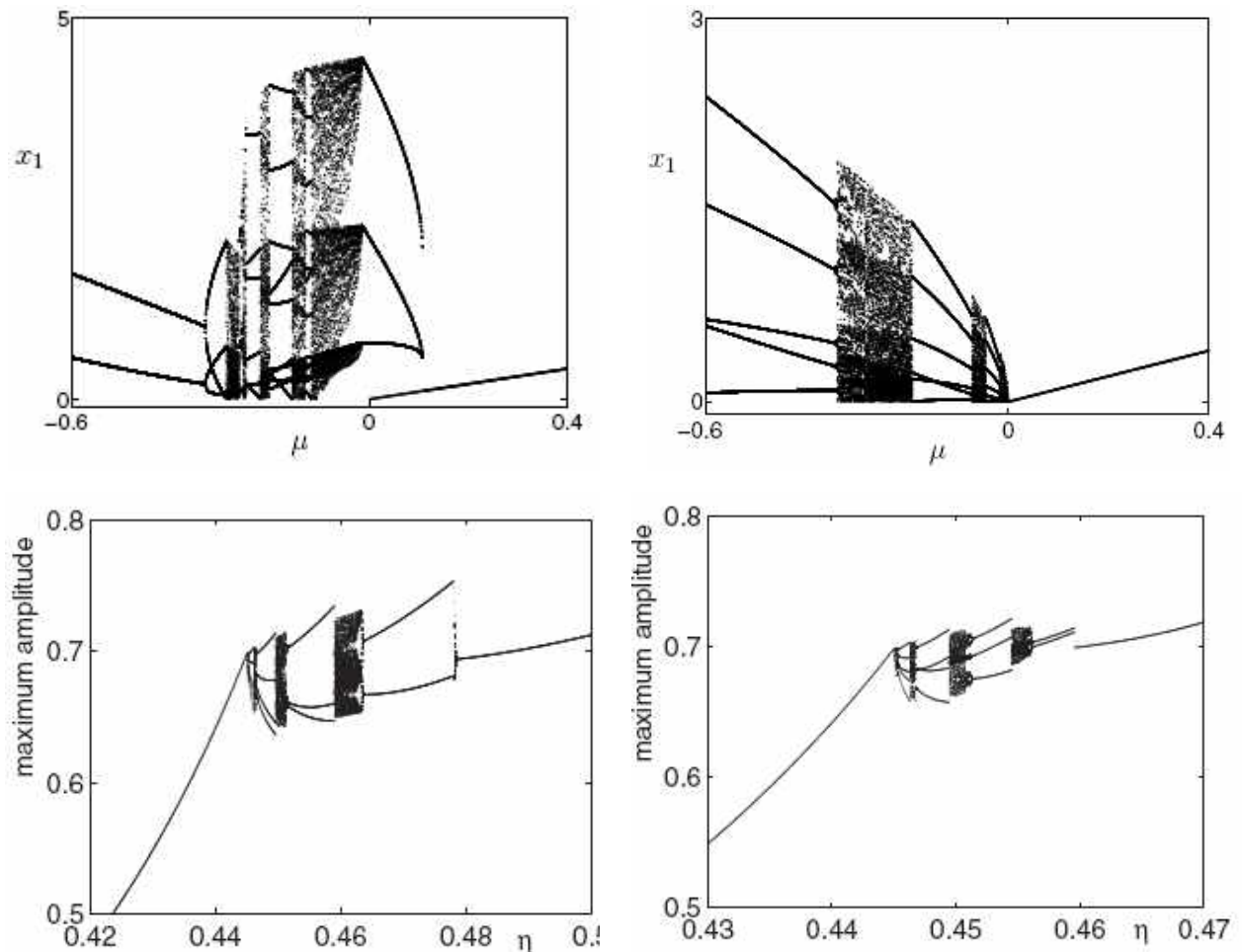


Рис. 2.12. Приклади розвитку процесу в нелінійній системі. Чітко видно “гладкі” області, області “стрибків” та “шумові” області [72].

Аналіз поведінки нелінійної динамічної моделі зубчатої пари [100] за різних частот збудження та жорсткості опори вала показав, що система входить у хаотичний рух зі стрибками частоти реакції при збільшенні частоти збудження. Коли жорсткість опори підвищується, кількість стрибків частоти збільшується, і система демонструє діапазони періодичної, субгармонійної та хаотичної поведінки. На Рис. 2.13 наведено реакцію зубчатої пари на зміну частоти збудження – чітко видно області різної поведінки системи залежно від нормованої частоти збудження та жорсткості зачеплення [100].

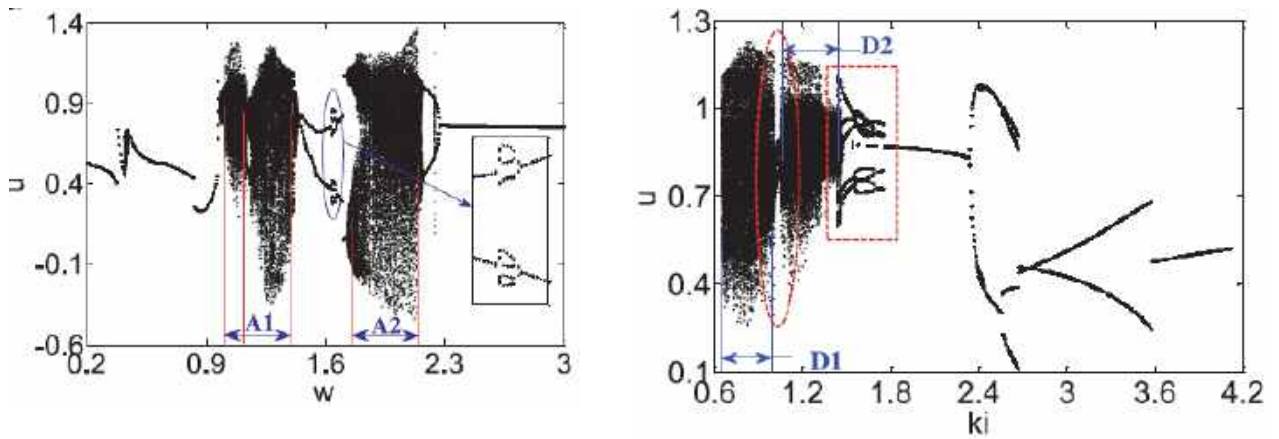


Рис. 2.13 Результати симуляції реакції зубчатої пари на зміну безрозмірної нормованої частоти збудження (а) та жорсткості зачеплення (б). Чітко видно “стрибки”, області хаотичного, квазіперіодичного і періодичного відгуку нелінійної системи [100].

Спектри реакції системи [100]. при переході з області D1 до D2 (Рис. 2.13) наведені на Рис. 2.14.

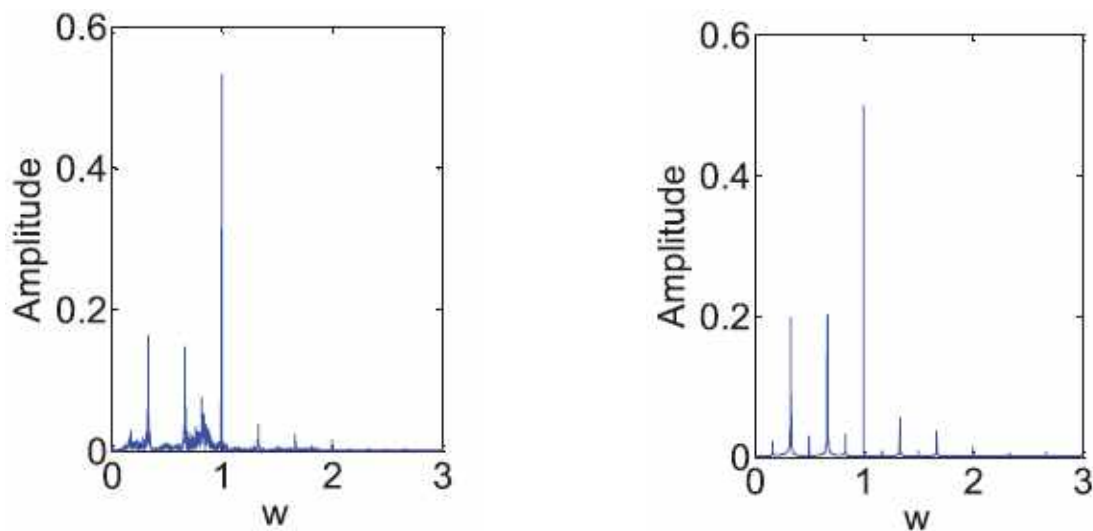


Рис. 2.14. Спектри реакції системи (залежно від нормованої частоти) при зміні нормованої жорсткості зчеплення зубчатої пари (Рис. 2.13) [100].

Наведені рисунки відображають поведінку зчеплення зубчатої пари, залежно від нормованої частоти збудження та жорсткості зачеплення.

Висновки до розділу 2.

Дефект у динамічній нелінійній системі зі збуренням на ранній стадії його розвитку не можна вважати станом чи подією згідно з існуючими стандартними означеннями. Він є власне періодично нестационарним випадковим процесом (ПНВП), причому цей процес породжується складною взаємодією коливних, квазіколивних та чисто випадкових складових і має ознаки нестационарності та стохастичності.

Поява нових прихованих стійких станів/атракторів, тобто дефектів у динамічній нелінійній системі супроводжується появою нових прихованих коливань. Частоти цих коливань не завжди відповідають власним частотам системи, хоча й можуть співпадати з ними. Ці коливання також не є наслідком відомого явища стохастичного резонансу.

Спектр коливань, що виникають у нелінійній динамічній системі унаслідок біфуркації може бути широкосмуговим і лінійчатим, з складними взаємними амплітудними та фазовими модуляціями, частоти ліній можуть бути кратними з цілими та/або дробовими множниками та містити комбінаційні частоти між різними компонентами і проявляються при діагностиці системи як періодично нестационарний випадковий сигнал (ПНВС).

Виявлення, виокремлення, оцінювання та класифікація діагностичних сигналів від дефектів на ранніх стадіях розвитку має базуватися на ПНВС представленні сигналу та спеціально розроблених для цього представлення моделях сигналу і методах обробки для оцінювання прихованих частотних складових у структурі діагностичного сигналу та їх взаємних модуляцій.

РОЗДІЛ 3

ОЦІНКА ПЕРІОДУ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО СИГНАЛУ ЯК ПРОБЛЕМА ПОШУКУ ПРИХОВАНИХ ПЕРІОДИЧНОСТЕЙ

Першою задачею, яка виникає при аналізі ПНВС-структури вібросигналів на основі даних вимірювань, є визначення періоду нестационарності. Вона розглядається як сформульована в рамках ПНВС-моделі задача виявлення та аналізу прихованих періодичностей. Методи їх розв'язання на основі аналізу часових змін оцінок функції математичного сподівання та кореляційної функції були запропоновані і дослідженні у [27, 28, 101–108].

3.1. Когерентний та компонентний методи кореляційного аналізу при невідомому періоді нестационарності.

Підхід до аналізу діагностичних сигналів, який ґрунтується на ПНВС-моделях і їх узагальненнях, об'єднує та розвиває детерміністичний та стохастичний підходи, що використовують з одного боку, представлення у вигляді періодичних та майже періодичних функцій, а з другого, у вигляді стаціонарних випадкових процесів, а також їх найпростіші поєднання.

ПНВС $\xi(t)$ як функція часу t використовується для опису стохастичних вібрацій у випадку, коли повторюваність їх властивостей характеризується тільки одним періодом. Функція математичного сподівання $m(t) = E\xi(t)$ і кореляційна функція $b(t, u) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m(t)$, де E - знак імовірного усереднення, періодично змінюються з часом t : $m(t) = m(t+T)$, $b(t, u) = b(t+T, u)$, тут T - період нестационарності, а u - часова затримка.

Якщо

$$\int_0^T |m(t)| dt < \infty, \int_0^T |b(t, \tau)| dt < \infty, \forall \tau \in R,$$

то функції $m(t)$ і $b(t, u)$ можуть бути представлені у вигляді рядів Фур'є:

$$m(t) = \sum_{k \in Z} m_k e^{ik\omega_0 t} = m_0 + \sum_{k \in N} (m_k^c \cos k\omega_0 t + m_k^s \sin k\omega_0 t),$$

$$b(t, u) = \sum_{k \in Z} B_k(u) e^{ik\omega_0 t} = B_0 + \sum_{k \in N} [B_k^c(u) \cos k\omega_0 t + B_k^s(u) \sin k\omega_0 t], \quad (3.1.1)$$

де $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ - основна частота, а $m_k = \frac{1}{2}(m_k^c - im_k^s)$, $\forall k \neq 0$,

$B_k(u) = \frac{1}{2}[B_k^c(u) - iB_k^s(u)]$, $\forall k \neq 0$, і $|m_k| \rightarrow 0$, $|B_k(u)| \rightarrow 0$ якщо $k \rightarrow \infty$,

Z означає множину цілих чисел, а N - множину натуральних чисел. Величини $B_k(u)$ називають кореляційними компонентами [20, 23], коефіцієнтними функціями [25] чи циклічними автокореляційними функціями [21, 22].

У випадку, коли період нестационарності є відомим, функція математичного сподівання $m(t)$, кореляційна функція $b(t, u)$, а також їх коефіцієнти Фур'є m_k і $B_k(u)$ можуть бути оцінені за допомогою когерентного [20, 22, 25, 109–111] чи компонентного [23, 110, 112] методів, методу найменших квадратів [113], методів лінійної гребінчастої [114] та смугової фільтрації [115]. Кожен з цих методів має свої характерні особливості і може бути застосований в залежності від тої чи іншої конкретної ситуації.

У перших роботах [101, 102], присвячених статистичному аналізу ПНВС у випадку, коли період нестационарності є невідомим, було показано, що когерентна

$$\hat{m}(\tau, t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t+n\tau) \quad (3.1.2)$$

і компонентні

$$\begin{cases} \hat{m}_k^c(\tau) \\ \hat{m}_k^s(\tau) \end{cases} = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) \begin{cases} \cos k \frac{2\pi}{\tau} t \\ \sin k \frac{2\pi}{\tau} t \end{cases} dt \quad (3.1.3)$$

статистики як функції пробного періоду τ досягають екстремальних значень в точках, які можуть бути прийняті як оцінки періоду нестационарності (N - натуральне число, $\theta = N\tau$ - півдовжина реалізації). Рівняння

$$\frac{d\hat{m}(\tau, t)}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\hat{m}_k(\tau)}{d\tau} = 0$$

є необхідними умовами існування екстремумів. На основі представлення розв'язків цих рівнянь у вигляді степеневих рядів за введеними малими параметрами в першому наближенні були отримані формули [101, 102], для зміщення й дисперсії оцінок періоду. Однак в цих роботах, як і в [103–105], поза увагою залишилися питання збіжності оцінок. У [106] такий аналіз був проведений для випадку, коли оцінка періоду знаходиться за допомогою компонентних статистик (3.1.3), які досягаються в точках $\tau = \hat{T}$, де \hat{T} - оцінка періоду, є оцінками коефіцієнтів Фур'є функції математичного сподівання ПНВС, а екстремальні значення компонентних статистик другого порядку

$$\begin{cases} \hat{B}_k^c(\hat{T}, u) \\ \hat{B}_k^s(\hat{T}, u) \end{cases} = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t-u) \begin{cases} \cos k \frac{2\pi}{\hat{T}} t \\ \sin k \frac{2\pi}{\hat{T}} t \end{cases} dt, \quad \overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - \hat{m}(\hat{T}, t), \quad (3.1.4)$$

є оцінками кореляційних компонентів.

Екстремальні значення статистик (3.1.2) у випадку полігармонічної структури функції математичного сподівання можуть значно перевищувати

амплітуди окремих гармонік, значення яких отримуються використовуючи перетворення (3.1.3). Тому оцінювання періоду на основі статистики (3.1.2) в цьому випадку може бути більш ефективним. До подібного висновку приходимо, порівнюючи інтегральні перетворення (3.1.4) і когерентне усереднення

$$\hat{b}(\tau, t, u) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \overset{\circ}{\xi}(t+n\tau) \overset{\circ}{\xi}(t+u+n\tau). \quad (3.1.5)$$

Перевагою когерентного методу є також те, що використовуючи для кожного моменту часу t екстремальні значення в точці $\tau = \hat{T}$, ми отримуємо оцінки часової залежності математичного сподівання та кореляційної функції, яка визначається всіма присутніми гармоніками з частотами, кратними до оцінки основної частоти $\hat{\omega}_0 = 2\pi / \hat{T}$. Використовуючи компонентний метод, ми повинні знати чи задати обмеження на число таких гармонічних компонент.

Аналіз збіжності оцінок періоду нестационарності, які отримуються на основі екстремальних значень когерентних статистик (3.1.2) і (3.1.5) проведений в роботах [107, 108]. Такі оцінки є розв'язками рівнянь, які представляють необхідні умови існування екстремумів. Вони представлені у вигляді степеневих рядів за введеними малими параметрами, які прямують до нуля зі збільшенням довжини реалізації при виконанні ергодичності ПНВС. Дослідження властивостей оцінок періоду проведені на основі перших трьох наближень.

У [107] доведена можливість використання статистик (3.1.2) і (3.1.5) для оцінювання функції математичного сподівання і кореляційної функції ПНВС, при цьому в отриманих виразах для зміщення і дисперсії оцінок цих величин виділені та проаналізовані компоненти, спричинені попереднім визначенням періоду нестационарності.

3.2. Оцінювання періоду як задача пошуку прихованих періодичностей.

Виникнувши з потреб геофізики та астрономії, задача пошуку прихованих періодичностей у значній мірі стимулювала розвиток методів аналізу часових рядів – даних спостережень за різноманітними фізичними явищами. Еволюція методів її розв’язування пов’язана, перш за все, з розвитком математичних моделей, в рамках яких описувались сигнали з властивостями періодичності та стохастичності. Перші дослідження прихованих періодичностей ґрунтувалися на селективних перетвореннях, які могли виділяти періодичні компоненти [116–118]. Серед них слід виділити так звану схему Бюй-Балло, яка ґрунтується на усередненні значень через пробний період та перетворення Фур’є, в якому замість істинного значення використовується деяка пробна величина, а також різні модифікації таких перетворень. При такому підході вважалося, що часовий ряд є послідовністю значень періодичної функції з незначними стохастичними флуктуаціями. Першим кроком до врахування стохастичних флуктуацій є адитивна модель

$$\xi(t) = f(t) + \eta(t),$$

де $f(t)$ є періодичною функцією, а $\eta(t)$ – стаціонарним випадковим процесом. Початок розвитку методів аналізу процесів, що описуються цією моделлю було закладено роботами А. Шустера [119–121]. Згодом його дослідження зробили великий вплив на формування ідей та методів класичного спектрального оцінювання. Для виявлення періодичностей А. Шустер запропонував використовувати періодограму

$$\hat{I}(\omega) = \frac{1}{2\pi K} \left| \sum_{n=1}^K \xi(nh) e^{-i\omega nh} \right|^2,$$

де h – інтервал дискретизації, а K – деяке натуральне число. Пошук періодичностей у рядах, котрі аналізуються, ґрунтується на виявленні

статистично значимих локальних максимумів величини $\hat{I}(\omega)$ за параметром ω . Однак уже сам А. Шустер вказав на значні труднощі, що виникають при такому підході. Він показав, що періодограма може мати фальшиві максимуми, що пояснюється тим, що середньоквадратична похибка періодограми $\hat{I}(\omega)$ не зменшується до нуля при зростанні розміру вибірки даних. Є.Є. Слущкий [122] встановивши, що осциляційний характер процесів може породжуватися взаємодією випадкових факторів, взагалі поставив під сумнів саму ідею виявлення прихованих періодичностей на основі аналізу періодограми.

Застосування статистичних методів спектрального аналізу стаціонарних випадкових процесів для виявлення прихованих періодичностей теоретично обґрунтовано Н. Вінером, який розвинув узагальнений гармонічний аналіз [123, 124] і А.Я. Хінчиним, який сформулював основи спектрально-кореляційної теорії стаціонарних випадкових процесів [125]. Р. Блекман і Дж. Тьюкі [126] розвинули практичні методи оцінювання спектральної густини потужності за експериментальними даними. Вони ґрунтуються на використанні перетворення Фур'є згладженої оцінки кореляційної функції. Відсутністю такого згладжування і були пояснені “погані” асимптотичні властивості періодограми. З того часу задача про виявлення прихованих періодичностей формулюється і розв’язується в рамках методів спектрального оцінювання стаціонарних випадкових процесів [117, 127, 128].

Пошук прихованих періодичностей в рамках моделі у вигляді стаціонарних випадкових процесів зводиться до виявлення вірогідних піків оцінок спектральної густини потужності [129–136]. При такому підході для інтерпретації локальних максимальних значень оцінок спектральної густини необхідні апріорні відомості про структуру часового ряду. Якщо припустити, що ряд описується моделлю $\xi(t) = s(t) + \eta(t)$, де $s(t)$ - полігармонічна функція, то такі піки обов’язково будуть з’являтися у точках, які відповідають частотам гармонічних складових. Для виявлення окремих

гармонік у цьому випадку на основі оцінок спектральної густини потужності можуть бути побудовані певні статистичні тести. Одним із перших таких тестів є тест Фішера [127], при якому відношення між найбільшим значенням оцінки та середнім її значенням на певному частотному інтервалі порівнюється з заданим порогом. М. Хініч [138], досліджуючи приховані періодичності поклав, що в адитивній моделі $\xi(t) = s(t) + \eta(t)$ функція $s(t)$ представляється сумою стохастично промодульованих за амплітудами і фазами гармонік. Таке представлення він назвав стохастично модульованою періодичністю. Для виявлення стохастичної модуляції М. Хініч ввів так звану функцію когерентності, яка визначається відношенням середньої потужності гармонік до суми середніх потужностей гармонічних і стохастичних складових. Така постановка задачі знову звела дослідження прихованих періодичностей до аналізу спектральної структури їх стаціонарних наближень. Однак, в загальному випадку, коли приховані періодичності описуються не простою ПНВС-моделлю, використання методів спектрального аналізу стаціонарних випадкових процесів є некоректним, оскільки модуляція гармонічних компонент функції $s(t)$, яка присутня в цьому випадку, може спричинити зміщення піку оцінки спектральної густини, його розмивання і навіть зникнення. Труднощі інтерпретації результатів спектрального оцінювання виникають також через те, що виявлені піки можуть бути результатами вузькосмуговості випадковго процесу $\eta(t)$. І тут логічно постає питання про те, що задачу пошуку прихованих періодичностей слід формулювати й розв'язувати в рамках їх періодично нестационарних моделей. Необхідність такого формулювання стає ще більш очевидною, якщо прийняти до уваги результати статистичної обробки методами ПНВС численних часових рядів вимірювань різноманітних фізичних величин [139–147]. Ці результати показують, що багатьом явищам властива періодична нестационарність як першого, так і другого порядків. При цьому виявляється, що прихована періодичність

далеко не завжди проявляється в оцінках характеристик стаціонарного наближення. Формулювання задачі виявлення прихованих періодичностей в термінах статистичного оцінювання імовірнісних характеристик ПНВС з невідомим періодом дає можливість позбутися протиріч традиційних підходів, розділяючи пошук детермінованих періодичних коливань і закономірностей періодичної мінливості властивостей флуктуаційних процесів. Власне в такій постановці задача пошуку прихованих періодичностей була сформульована у роботах [27, 28, 148], а потім розвинута в [103–108]. Подібний підхід до цієї задачі розглядається пізніше в роботах [149–156].

У роботі [149] для виявлення періодичних кореляцій між спектральними компонентами випадкового процесу був запропонований графічний метод, який ґрунтується на модифікованому для нестаціонарного випадку тесті Гудмена. На двочастотній площині така корельованість проявляється в присутності спектральних ліній, паралельних до головної діагоналі. В [150] показано, що для виявлення періодичної нестаціонарності можуть бути використані статистичні тести, сформовані на основі оцінок кореляційних і спектральних характеристик, а також статистик k -го порядку, в яких замість істинних значень циклічних частот використовуються деякі пробні величини. Методи виявлення циклостаціонарних сигналів на основі циклічних автокореляцій і циклічних періодограм розвиваються також в [149]. Однак у згаданих вище роботах не розглядаються задачі визначення періоду нестаціонарності як основної циклічної частоти $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Робота [152] присвячена визначенню параметрів гармонік, в тому числі включаючи їх частоти, які спостерігаються на фоні адитивного чи мультиплікативного шуму. Автори показують, що в найпростіших випадках ПНВС оцінки циклічних частот, що отримані компонентним методом і методом найменших квадратів збігаються, а їхні дисперсії мають порядок $O(\theta^{-3})$. В оглядовій

статті [153] відмічено, що оцінки циклічних частот можуть знаходитися за максимальними значеннями перетворень

$$\lambda^{(\theta)}(\nu) = \int_{-u_m}^{u_m} |B^{(\theta)}(\nu, u)|^2 du,$$

$$B^{(\theta)}(\nu, u) = \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t+u) \xi(t) e^{-i2\pi\nu t} dt.$$

У роботах [144, 155] розглянуто дискретний аналог перетворення $\lambda^{(\theta)}(\nu)$. Основним результатом цих робіт є доведення середньоквадратичної слушності такої оцінки циклічної частоти, а також її асимптотичної нормальності. Було також показано, що дисперсія оцінки має порядок малості $O(\theta^{-3})$.

У роботі [156] представлено алгоритм оцінювання циклічних частот гармонік майже періодично корельованих послідовностей. Цей алгоритм ґрунтується на визначенні головних локальних максимумів зважених дискретних перетворень Фур'є окремих реалізацій послідовностей.

Задача оцінювання періоду нестационарності з використанням компонентних статистик першого й другого роду в загальному випадку розглянуто в роботах [28, 106–108]. Показано, що оцінки періодів є асимптотично незміщеними та слушними, при цьому їхні зміщення мають порядок $O(\theta^{-2})$, а дисперсії - $O(\theta^{-3})$. Порядок малості цих оцінок збігається з тим, який був отриманий для таких величин П. Стойком в його роботах [157, 158], де знаходилися частоти майже періодичного сигналу зі скінченним числом гармонік, який спостерігався на фоні стаціонарного кольорового шуму. Слід відзначити, що й інші роботи [128, 130, 131], присвячені визначенню частот полігармонічних коливань, зашумлених адитивним випадковим процесом, також обмежуються тільки стаціонарним випадком, тому отримані в них результати не можуть бути використані у випадку, коли коливання описуються ПНВС.

3.3. ПНВС-модель прихованих періодичностей.

Статистики (3.1.2) і (3.1.5) у випадку ПНВС є узагальненнями схеми Бюй-Балло [117, 118] – одного з перших перетворень, які використовувались для розділення детермінованих періодичних складових сигналів. У роботах [27, 104, 107, 108] таке перетворення використовується для аналізу періодичної структури моментних функцій ПНВС першого та другого порядків.

У літературі (див. напр., [117]) симетричне усереднення (3.1.2) називають фільтром Бюй-Балло. Передавальна функція цього фільтра

$$H_{\tau}(\omega) = \frac{\sin \frac{2N+1}{2} \omega \tau}{(2N+1) \sin \frac{\omega \tau}{2}} \quad (3.3.1)$$

є періодичною функцією з періодом $\frac{2\pi}{\tau}$, а її значення рівні одиниці, якщо

$\omega = k \frac{2\pi}{\tau}$, ($k \in Z$). Таким чином, використовуючи усереднення (3.1.2),

знаходимо значення періодичної функції з періодом τ в момент часу t . Очевидно, що коливання на виході такого фільтра будуть мати максимальну амплітуду тоді, коли тестовий період τ дорівнює періоду вхідних коливань. З виразу (3.3.1) випливає, що ефективність схеми Бюй-Балло покращується зі збільшенням числа точок усереднення N . Головний максимум функції $H_{\tau}(\omega)$ стає вузьким, а величина бічних “пелюсток” зменшується. Амплітуди цих пелюсток зменшуються до нуля, якщо $N \rightarrow \infty$. Слід відмітити, що хоча схема Бюй-Балло є широко відомою в літературі, теоретичні дослідження оцінки періоду, що знаходиться з її використанням, відсутні навіть для найпростіших випадків ПНВС, окрім робіт [27, 104, 107].

У ПНВС-моделі прихованих періодичностей її властивості описуються періодичними за часом функцією математичного сподівання $m(t)$,

кореляційною функцією $b(t,u)$ і спектральною густиною, котра також є функцією часу t :

$$f(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(t, u) e^{-i\omega u} du. \quad (3.3.2)$$

Тут припущено, що $\int_{-\infty}^{\infty} |b(t, u)| du < \infty \quad \forall t \in [0, T]$.

Миттєва спектральна густина може бути представлена у вигляді ряду Фур'є:

$$f(\omega, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(\omega) e^{ik\omega t}, \quad (3.3.3)$$

де

$$f_k(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k(u) e^{-i\omega u} du. \quad (3.3.4)$$

Величини $f_k(\omega)$ називають спектральними компонентами [114, 115] чи спектральними кореляційними функціями [21, 22]. Нульові кореляційний і спектральний компоненти визначаються усередненими за часом кореляційною функцією $b(t, u)$ і спектральною густиною $f(\omega, t)$. Вони називаються відповідно кореляційною функцією і спектральною густиною стаціонарного наближення ПНВС.

Присутність чи відсутність періодичних змін у флуктуаційній складовій процесу $\overset{\circ}{\xi}(t)$, якщо $\int_{-\infty}^{\infty} |b(t, u)| du < \infty \quad \forall t \in [0, T]$ не залежить від поведінки кореляційної функції $b(t, u)$ за зсувом u чи спектральної густини за частотою ω . Наприклад, для періодично корельованого білого шуму [6] $\overset{\circ}{\xi}(t) = \eta(t)\sigma(t)$, де $E\overset{\circ}{\eta}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u) = N\delta(\tau)$, $\overset{\circ}{\eta}(t) = \eta(t) - m_\eta$, $m_\eta = E\eta(t)$, маємо $b(t, u) = N\sigma(t)\sigma(t+\tau)\sigma(\tau)$. Спектральна густина такого процесу $f(\omega, t) = N\sigma^2(t)$ для фіксованих значень t є константою. Для амплітудно-

модульованого коливання $\xi(t) = \eta(t) \cos \omega_0 t$ у випадку, коли кореляційна функція процесу $\eta(t)$ швидко зникає, точка максимального значення спектральної густини стаціонарного наближення буде зміщена по відношенню до частоти несучої ω_0 , або навіть знаходитися в точці $\omega = 0$. Тому методи виявлення прихованих періодичностей повинні ґрунтуватися на пошуку періодичних змін імовірнісних характеристик за часом.

Представлення ПНВС через стаціонарно зв'язані компоненти [123–126]:

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} \quad (3.3.5)$$

є важливим для розуміння ПНВС як моделі прихованої періодичності. Як видно з (3.3.5), ПНВС може бути представлений як сума стохастично модульованих за амплітудою і фазою гармонік, частоти яких є кратними до деякої основної (базової) частоти ω_0 . Середні значення модулюючих процесів $\xi_k(t)$ є Фур'є-коефіцієнтами функції $m(t): E \xi_k(t) = m_k$.

Взаємкореляційні функції $R_{kl}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k(t) \overset{\circ}{\xi}_l(t+u)$ стаціонарно зв'язаних компонент $\overset{\circ}{\xi}_k(t)$, де $\overset{\circ}{\xi}_k(t) = \xi_k(t) - m_k$, а “ $\overset{\circ}{}$ ” означає комплексне спряження, номери яких зміщені на r , визначають r -ий кореляційний компонент:

$$B_r(u) = \sum_{k \in Z} R_{k+r,k}(u) e^{-ik\omega_0 u}.$$

З останнього виразу випливає, що взаємні кореляції між модулюючими процесами $\xi_k(t)$, $k \in Z$, приводять до періодичної нестаціонарності другого порядку. Автокореляційні функції цих процесів $R_{kk}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k(t) \overset{\circ}{\xi}_k(t+u)$ визначають нульовий кореляційний компонент ПНВС.

З представлення (3.3.5) легко отримуються окремі випадки моделі прихованих періодичностей у вигляді ПНВС: адитивна, мультиплікативна, адитивно-мультиплікативна, квадратурна та інші моделі. Якщо, наприклад,

$\xi_k(t) = m_k + \eta_k(t)$, де $\eta_k(t)$ - стаціонарні випадкові процеси, для яких $E\eta_k(t) = 0$, $R_{kl}(u) = E\eta_k(t)\overline{\eta_l(t+u)} = R_k(u)\delta_{kl}$, а m_k - деякі комплексні числа, то

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} m_k e^{ik\omega_0 t} + \sum_{k \in Z} \eta_k(t) e^{ik\omega_0 t} = f(t) + \eta(t),$$

де $f(t)$ - періодична функція, а $\eta(t)$ - стаціонарний випадковий процес з кореляційною функцією $R(u) = \sum_{k \in Z} R_k(u) e^{-ik\omega_0 u}$.

Якщо покласти $\xi_k(t) = m_k \eta(t)$, то тоді отримується мультиплікативна модель

$$\xi(t) = \eta(t) \sum_{k \in Z} m_k e^{ik\omega_0 t} = \eta(t) f(t).$$

Комбінуючи наведені вище випадки, приходимо до адитивно-мультиплікативної моделі.

Якщо $\xi_k(t) \equiv 0 \quad \forall k \neq -1, 1$, то тоді

$$\xi(t) = \xi_c(t) \cos \omega_0 t + \xi_s(t) \sin \omega_0 t = A(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)],$$

де $\xi_c(t) = \xi_1(t) + \xi_{-1}(t)$, $\xi_s(t) = i[\xi_1(t) - \xi_{-1}(t)]$, $A(t) = \sqrt{\xi_c^2(t) + \xi_s^2(t)}$ і $\varphi(t) = \arctg \frac{\xi_s(t)}{\xi_c(t)}$. Це є так звана квадратурна модель (представлення Райса) -

найпростіша модель, яка описує одночасно амплітудну і фазову модуляції.

Полігармонічна модель (періодичний випадковий процес) отримується у випадку, коли всі процеси $\xi_k(t)$ вироджуються у випадкові величини ξ_k :

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} \xi_k e^{ik\omega_0 t}.$$

Якщо всі коефіцієнти ξ_k є детермінованими величинами, тоді $\xi(t)$ стає періодичною функцією.

Таким чином, структура прихованих періодичностей в рамках ПНВС-моделі визначається структурою модулюючих процесів $\xi_k(t)$ у виразі (3.3.5). Періодичність у ПНВС може проявлятися винятково тільки в імовірнісних характеристиках першого порядку, тобто в характеристиках детермінованої складової коливаних, чи винятково тільки в характеристиках другого порядку, які описують флуктуаційні коливання, або і в тих, і в других. Тому відповідно мусить бути сформована й задача їх виявлення.

3.4. Порівняльний аналіз ПНВС-методів виявлення прихованих періодичностей.

Порівняємо когерентний та компонентний методи виявлення прихованих періодичностей між собою, а також з тими, які є відомими в літературі.

Детерміновані складові когерентних статистик (3.1.2) і (3.1.5) $S_m(t, \tau) = E\hat{m}(t, \tau)$ і $S_b(t, u, \tau) = E\hat{b}(t, u, \tau)$ досягають екстремальних значень в точці $\tau = T$ для тих моментів часу, де другі похідні по часу t функції математичного сподівання і кореляційної функції дорівнюють нулю і $S_m(t, P) = m(t) \neq 0$ і $S_b(t, u, P) = b(t, u) \neq 0$.

Якщо $b(t, \tau)$ прямує до нуля зі зростанням τ , тобто

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} b(t, \tau) = 0, \quad (3.4.1)$$

то (3.1.2) збігається в середньоквадратичному (3.1.5) до $S_R(t, u, \tau)$ для Гаусових ПНВС. Це робить можливим знаходити оцінки періоду як точки екстремумів (3.1.2) і (3.1.5). Властивості таких оцінок були проаналізовані на основі розв'язків нелінійних рівнянь, які є необхідними умовами для існування екстремумів. Використавши метод малого параметра отримуємо формули для зміщення й дисперсії оцінок періоду і доведемо їх асимптотичну незміщеність і слушність.

У першому наближенні зміщення оцінки періоду математичного сподівання $\varepsilon[\hat{T}] = E\hat{T} - T$ і дисперсія $D[\hat{T}] = E[\hat{T} - E\hat{T}]^2$ мають вигляд

$$\varepsilon[\hat{T}] = \frac{9 \sum_{m,n=-N}^N \left[\frac{\partial^3 b(t+nx, my-nx)}{\partial x \partial y^2} \right]_{\substack{x=T \\ y=T}}}{[N(N+1)(2N+1)m''(t)]} + O(N^{-2}), \quad (3.4.2)$$

$$D[\hat{T}] = \frac{9 \sum_{m,n=-N}^N \left[\frac{\partial^3 b(t+nx, my-nx)}{\partial x \partial y^2} \right]_{\substack{x=T \\ y=T}}}{[N(N+1)(2N+1)m''(t)]} + O(N^{-3}). \quad (3.4.3)$$

Слід відмітити, що зміщення має порядок $O(N^{-2})$, а дисперсія - $O(N^{-3})$.

Формули для зміщення та дисперсії періоду кореляційної функції часового ПНВС мають подібний вигляд з тою різницею, що замість кореляційної функції ПНВС в них містяться кореляційна функція процесу $\zeta(t, \tau) = \overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+\tau)$.

Компонентні оцінки періоду визначаються на основі екстремальних значень функціоналів [103, 104, 106]:

$$m_k^{c,s}(\tau) = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) \left\{ \begin{array}{l} \cos k \frac{2\pi}{\theta} t \\ \sin k \frac{2\pi}{\theta} t \end{array} \right\} dt, \quad (3.4.4)$$

$$B_k^{c,s}(u, \tau) = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) \left\{ \begin{array}{l} \cos k \frac{2\pi}{\tau} t \\ \sin k \frac{2\pi}{\tau} t \end{array} \right\} dt, \quad (3.4.5)$$

де $\theta = N\tau$ - напівдовжина реалізації. Статистики (3.4.4)–(3.4.5) мають екстремуми в точках, які можуть бути прийняті за оцінки періоду нестационарності. Виконання рівнянь

$$\frac{d\hat{m}_k^{c,s}(\tau)}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\hat{B}_k^{c,s}(u, \tau)}{d\tau} = 0$$

є необхідними умовами для існування екстремумів. На основі представлення розв'язків цих рівнянь у формі степеневих рядів за введеними малими параметрами були отримані формули для зміщення і дисперсії оцінок періоду. Для дисперсії оцінок періоду з використанням статистик (3.4.4) маємо:

$$D[\hat{T}_{c,s}] = \frac{3T^2}{k^2 \theta^3 (m_k^{c,s})^2} \int_0^{2\theta} \left[2B_0(u) \cos k\omega_0 u \mp \right. \\ \left. \mp [B_{2k}^c(u) \cos k\omega_0 u - B_{2k}^s(u) \sin k\omega_0 u] \right] du. \quad (3.4.6)$$

Як видно з (3.4.6), значення дисперсій обернено пропорційними до квадрату амплітуди косинусної чи синусної компонент, які використовуються для оцінювання періоду, а також квадрату їх номера. В основному ж вони визначаються нульовим кореляційним компонентом, а також кореляційними компонентами, номери яких у два рази перевищують номери тих гармонік, для котрих оцінюється період. Дисперсії відрізняються тільки знаками тих складових, які залежать від кореляційних компонентів вищих номерів.

Формули для дисперсій оцінок періоду, знайдених за статистиками (3.4.5), отримуємо, замінюючи у множнику у виразі (3.4.6) коефіцієнти Фур'є функції математичного сподівання $m_k^{c,s}$ на кореляційні компоненти $B_k^{c,s}(u)$, а в підінтегральній функції кореляційні компоненти $B_0(u)$ і $B_{2k}^{c,s}(u)$ на кореляційні компоненти тих же номерів кореляційної функції процесу $\zeta(t, u)$.

Ефективність когерентних і компонентних оцінок періоду може бути порівняна теоретично, якщо конкретизувати формули (3.4.2) і (3.4.3) і (3.4.6) для окремих випадків ПНВС. Припустимо, що періодична функція $m(t)$, період якої невідомий, спостерігається на фоні стаціонарного випадкового процесу $\eta(t)$, тобто $\xi(t) = m(t) + \eta(t)$. Покладемо $m_\eta = E\eta(t) = 0$ і

$R_\eta(\tau) = E\dot{\eta}(t)\dot{\eta}(t+\tau) = Ae^{-\alpha\tau^2}$. Якщо декремент зникання є таким, що $e^{-\alpha T^2} \approx 0$, то для когерентної оцінки періоду маємо

$$D_{\text{коз}}[\hat{T}] = \frac{3A\alpha}{N^3[m''(t)]^2}. \quad (3.4.7)$$

Дисперсія компонентної оцінки $D_{\text{ком}}[\hat{T}]$, отриманої за першою гармонікою $m(t)$ визначається за формулою

$$D_{\text{ком}}[\hat{T}] = \frac{3T^4}{2(m_1^c)^2 \pi \theta^3} \int_0^{2\theta} R_\eta(u) \cos \omega_0 u du.$$

Для великих θ

$$2 \int_0^{2\theta} R_\eta(u) \cos \omega_0 u du \approx f_\eta(\omega_0).$$

Тоді

$$D_{\text{ком}}[\hat{T}] = \frac{3TA}{8\pi(m_1^c)^2 N^3 \sqrt{\pi\alpha}} e^{\frac{\omega_0^2}{4\alpha}}. \quad (3.4.8)$$

Для відношення величин (3.4.7) і (3.4.8) отримуємо:

$$\frac{D_{\text{коз}}[\hat{T}]}{D_{\text{ком}}[\hat{T}]} = \frac{(m_1^c)^2 (\sqrt{2}T)^3}{2\pi\sqrt{\pi} \left(\frac{m''(t)}{\omega_0^2} \right)} e^{\frac{\omega_0^2}{4\alpha}}.$$

Припустимо, що $\frac{\omega_0^2}{4\alpha^2} \ll 1$, тоді $e^{\frac{\omega_0^2}{4\alpha^2}} \approx 1$. Якщо $m(t) = 3\cos \omega_0 t + 2\cos 2\omega_0 t$,

$A=3$, $\alpha=1.0$, $T=10$, то $D_{\text{коз}}[\hat{T}] = 2.1 D_{\text{ком}}[\hat{T}]$. Якщо $\alpha=0.1$, то

$$D_{\text{коз}}[\hat{T}] = 1.8 D_{\text{ком}}[\hat{T}].$$

Для $m(t) = a \cos \omega_0 t$ отримуємо відношення $\frac{D_{\text{ког}}[\hat{T}]}{D_{\text{ком}}[\hat{T}]} = \frac{(\sqrt{\alpha T})^3}{2\pi\sqrt{\pi}} e^{\frac{\omega_0^2}{4\alpha^2}}$.

Різниця між дисперсіями зменшується, якщо зменшується величина $\sqrt{\alpha T}$. Однак у випадку малих $\sqrt{\alpha T}$ необхідно використовувати точніші формули.

Відмітимо, що використовуючи когерентний чи компонентний метод для оцінювання періоду нестационарності ми знаходимо також оцінки відповідних характеристик ПНВС. Ці оцінки є екстремальними значеннями статистик, які використовуються. Однак у випадку когерентного оцінювання ми можемо знайти оцінки функції математичного сподівання чи кореляційної функції на довільному інтервалі часу незалежно від їх гармонічного складу. Обчислюючи їх на інтервалі $[0, T]$, ми можемо провести гармонічний аналіз цих величин. У випадку компонентного методу ми оцінюємо амплітуду тільки однієї з гармонік і для оцінювання її часової залежності ми повинні знаходити оцінки амплітуд кожної з можливих гармонік з частотою, кратною до основної. Тому доцільно на першому етапі аналізу експериментальних даних застосовувати когерентний метод, а потім для уточнення отриманих значень оцінок використовувати компонентний метод, який дає можливість відфільтрувати незначні за величиною гармоніки.

Як вже було підкреслено, задача оцінювання періоду нестационарності ПНВС може розглядатися як задача виявлення прихованих періодичностей, сформульована в рамках ПНВС-моделі. У літературі можна знайти ряд праць, в якій ця задача розв'язується на основі найпростіших моделей ПНВС – адитивної та мультиплікативної. У першому випадку вона формулюється як обчислення параметрів суми гармонік з невідомими частотами, що спостерігаються на фоні стаціонарного шуму, а в другому припускається модуляція їх амплітуд. Для оцінювання частот гармонік використовується метод максимальної правдоподібності, метод найменших квадратів, спеціальні методи, включаючи різні модифікації методів авторегресії.

Порівняльний аналіз їх ефективності можна знайти в монографії [128]. Якщо гармонічні сигнали з амплітудами m_k спостерігається на фоні білого шуму з потужністю σ_ω^2 , то нижня границя дисперсії оцінки частот $\hat{\omega}_k$ визначається границею Крамера-Рао

$$D[\hat{\omega}_k] = \frac{24\sigma_\omega^2}{\theta_d^3 |m_k|^2},$$

де $\theta_d = 2\theta$. У випадку кольорового шуму найменша дисперсія оцінки $D[\hat{\omega}_k]$ була отримана в [157] для так званої нелінійної середньоквадратичної оцінки

$$D[\hat{\omega}_k] = \frac{12}{\theta_d^3 SNR_k},$$

де SNR_k означає узагальнене співвідношення сигнал/шум для k -ої гармоніки

$$SNR_k = \frac{|m_k|^2}{2|H(\omega_k)|^2},$$

де $H(\omega)$ - формуючий фільтр шуму. У випадку білого шуму $SNR_k = \frac{|m_k|^2}{2\sigma_\omega^2}$.

У [152] розглянута задача оцінювання параметрів амплітудомодульованого сигналу, який спостерігається на фоні стаціонарного випадкового процесу

$$\xi(t) = \mu(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) + \eta(t). \quad (3.4.9)$$

Тут $\mu(t)$ - стаціонарний випадковий процес з невідомим математичним сподіванням. Використовуючи метод найменших квадратів, у [152] отримано наступний вираз для дисперсії оцінки частоти $\hat{\omega}_0$:

$$D[\hat{\omega}_0] = \frac{1}{\theta_d^2} \left[\frac{24f_\eta(\omega_0)}{m_\mu^2} + \frac{\sigma f_\mu(\omega_0)}{m_\mu^2} \right], \quad (3.4.10)$$

де $f_\eta(\omega_0)$ і $f_\mu(\omega_0)$ - спектральні густини потужності стаціонарних випадкових процесів $\eta(t)$ і $\mu(t)$.

Порівняємо це співвідношення з виразом, що отримується як окремий випадок формули для дисперсії оцінки періоду нестационарності ПНВС в загальному випадку. Для цього використаємо рівність, що в першому наближенні пов'язує дисперсії оцінки періоду \hat{T} і частоти $\hat{\omega}$. Ряд Тейлора для оцінки $\hat{T} = \frac{2\pi}{\hat{\omega}}$ має вигляд:

$$\frac{2\pi}{\hat{\omega}} = \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{2\pi}{\omega_0^2}(\hat{\omega} - \omega_0) + \frac{4\pi}{\omega_0^3}(\hat{\omega} - \omega_0)^2 - \dots$$

Звідси знаходимо

$$D[\hat{T}] \approx \frac{4\pi^2}{\omega_0^4} D[\hat{\omega}] = \frac{T^4}{4\pi^2} D[\hat{\omega}].$$

Дисперсія оцінки періоду сигналу (3.4.9) для $\varphi = 0$, яка знаходиться як точка екстремуму статистики $\hat{m}(\tau) = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) \cos \frac{2\pi}{\tau} t dt$ має форму:

$$D[\hat{T}] = \frac{12\pi^2}{m_\mu^2 \omega_0^4 \theta^3} \int_0^{2\theta} [2B_0(u) \cos \omega_0 u - B_2^c(u) \cos \omega_0 u + B_2^s(u) \sin \omega_0 u] du,$$

де

$$B_0(u) = R_\eta(u) + \frac{1}{2} R_\mu(u) \cos \omega_0 u, \quad B_2^c(u) = \frac{1}{2} R_\mu(u) \cos \omega_0 u, \\ B_2^s(u) = \frac{1}{2} R_\mu(u) \sin \omega_0 u.$$

Після перетворень знаходимо:

$$D[\hat{T}] = \frac{6\pi^2}{m_\mu^2 \omega_0^4 \theta^3} \int_0^{2\theta} [4R_\eta(u) \cos \omega_0 u + R_\mu(u) \cos 2\omega_0 u] du.$$

Для великих θ :

$$2 \int_0^{2\theta} R_\eta(u) \cos \omega_0 u du \approx f_\eta(\omega_0),$$

$$2 \int_0^{2\theta} R_\mu(u) \cos \omega_0 u du \approx f_\mu(2\omega_0).$$

Тоді

$$D[\hat{T}] = \frac{3\pi^2}{m_\mu^2 \omega_0^4 \theta^3} [2f_\eta(\omega_0) + f_\mu(2\omega_0)].$$

Приймаючи до уваги, що $\theta = \frac{\theta_d}{2}$ і $D[\hat{\omega}] = \frac{\omega_0^4}{4\pi^2} D[\hat{T}]$, отримуємо формулу (3.4.10).

Якщо $\mu(t) \equiv m_\mu$, то:

$$D[\hat{\omega}_0] = \frac{24f_\eta(\omega_0)}{\theta_d^2 m_\mu^2}.$$

У випадку, коли $\eta(t)$ є білим шумом з потужністю σ_ω^2 , ми отримуємо вираз для нижньої границі Крамера-Рао.

Відтак, ефективність когерентної і компонентної оцінок періоду нестационарності ПНВС мало відрізняються у випадку, коли кореляційні зв'язки повільно зникають з ростом величини часової затримки. Відомі в літературі результати з оцінювання частот сигналів, які описуються найпростішими окремими випадками ПНВС, а саме адитивною й мультиплікативною моделями ПНВС, є частинними випадками результатів, отриманих при компонентному оцінюванні. Якщо періодичний чи неперіодичний сигнал спостерігається на фоні білого шуму, дисперсія компонентної оцінки частоти збігається з границею Крамера-Рао.

3.5. Оцінювання функції математичного сподівання та її коефіцієнтів Фур'є при невідомому періоді нестационарності.

Розглянемо оцінку математичного сподівання:

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t+n\hat{T}), \quad (3.5.1)$$

де \hat{T} є оцінкою періоду і покажемо, що при виконанні умови (3.4.1) така оцінка є асимптотично незміщеною і слушною.

Перепишемо вираз (3.5.1) у вигляді

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t+nx) \delta(x-\hat{T}) dx,$$

де $\delta(x)$ - дельта-функція Дірака. Використовуючи представлення дельта-функції у вигляді ряду Тейлора:

$$\delta(x-\hat{T}) = \delta(x-T) - \delta'(x-T)(\hat{T}-T) + \frac{1}{2} \delta''(x-T)(\hat{T}-T)^2 - \dots \quad (3.5.2)$$

а також рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t+nx) \delta'(x-T) dx = - \left[\frac{\partial \xi(t+nx)}{\partial x} \right]_{x=T}, \quad (3.5.3)$$

в першому наближенні знаходимо [127, 163]:

$$\begin{aligned} \hat{m}(t) = & \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t+nT) - \frac{3}{N(N+1)(2N+1)^2} m''(t) \sum_{m,n=-N}^N \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \xi(t+nx) \times \right. \\ & \left. \times \xi(t+ny) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}}. \end{aligned}$$

Звідси для величини зміщення оцінки функції математичного сподівання ми отримуємо формулу:

$$\varepsilon[\hat{m}(t)] = - \frac{3}{N(N+1)(2N+1)^2} m''(t) \sum_{m,n=-N}^N \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} b(t+nx, my-nx) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} + O(N^{-1})$$

Аналізуючи цей вираз бачимо, що зміщення має порядок $O(N^{-1})$.

Для дисперсії оцінки функції математичного сподівання $D[\hat{m}(t)] = E[\hat{m}(t)]^2 - [E\hat{m}(t)]^2$ для Гаусового ПНВС після перетворень отримуємо:

$$D[\hat{m}(t)] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{2N+1}\right) b(t, nT) + \frac{18}{[N(N+1)(2N+1)^2 m''(t)]^2} \times \\ \times \left[\sum_{n=-N}^N \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} b(t+nx, ty-nx) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} \right]^2 + O(N^{-2}).$$

Перша складова цього виразу співпадає з формулою для дисперсії оцінки функції математичного сподівання при відомому періоді, а друга визначає величину, на яку зростає дисперсія у випадку, коли період потрібно попередньо оцінювати. Аналіз другої складової показує, що вона має порядок $O(N^{-2})$, тобто вона має вищий порядок малості, ніж перша складова.

Проаналізуємо тепер властивості оцінок коефіцієнтів Фур'є функції математичного сподівання

$$\hat{m}_k = \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt, \quad (3.5.4)$$

де θ є напівдовжиною реалізації. Перепишемо статистику (3.5.4) у форму:

$$\hat{m}_k = \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik \frac{2\pi}{x} t} \delta(x - \hat{T}) dx \right] dt.$$

Приймаючи до уваги співвідношення (3.5.2) і (3.5.3), отримуємо:

$$\hat{m}_k = \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt - \frac{3ik\omega_0}{TN(N+1)(2N+1)m''(t)} \times \\ \times \sum_{n=-N}^N \left[\frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} s \left[\frac{\partial}{\partial x} \xi(s) \dot{\xi}(t+nx) \right]_{x=T} e^{-ik\omega_0 s} ds \right]. \quad (3.5.5)$$

Після усереднення й перетворень приходимо до наступного виразу для зміщення $\varepsilon[\hat{m}_k] = E\hat{m}_k - \hat{m}_k$:

$$\varepsilon[\hat{m}_k] = \sum_{\substack{l \in Z \\ l \neq k}} m_l \frac{\sin(l-k)\omega_0\theta}{(l-k)\omega_0\theta} - \frac{3ik\omega_0}{TN(N+1)(2N+1)m''(t)} \times \\ \times \sum_{n=-N}^N \left[\frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} s \left[\frac{\partial}{\partial x} b(s, t-s+nx) \right]_{x=T} e^{-ik\omega_0 s} ds + O(N^{-1}) \right].$$

Перша складова цієї формули зумовлена ефектом просочування, який є відсутнім при $\theta = NT$. Друга складова виникає унаслідок впливу попереднього оцінювання періоду. Як показує аналіз, вона має порядок $O(N^{-1})$.

На основі співвідношення (3.5.5) для дисперсії статистики (3.5.4) знаходимо:

$$D[\hat{m}_k] = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) B_0(u) \cos k\omega_0 u du + \frac{1}{2\theta^3} \sum_{l \in Z} \int_0^{2\theta} B_l(u) h_l(-\theta, \theta-u) \times \\ \times \cos k\omega_0 u du + \frac{9k^2\omega_0^2}{[TN(N+1)(2N+1)m''(t)]^2} \times \\ \times \sum_{m,n=-N}^N \left[\frac{1}{4\theta^3} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} s_1 s_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} b(s_1, t-s_1+nx) \right]_{x=T} \times \right. \\ \times \left. \left[\frac{\partial}{\partial x} b(s_2, t-s_2+mx) \right]_{x=T} e^{ik\omega_0(s_2-s_1)} ds_1 ds_2 + \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} b(t+nx, my-nx) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} \right] \times \\ \times \sum_{l \in Z} \left[\frac{1}{2\theta^2} \int_0^{2\theta} \left[B_l(u) + \sum_{r \in Z} m_r \bar{m}_{r+l} e^{ir\omega_0 u} \right] g_l(l-\theta, \theta-u) \cos k\omega_0 u du \right] + O(N^{-2}),$$

де

$$h_2(-\theta, \theta-u) = \int_{-\theta}^{\theta-u} e^{ir\omega_0 s} ds, \quad g_2(-\theta, \theta-u) = \int_{-\theta}^{\theta-u} s(s+u) e^{ir\omega_0 s} ds.$$

Функція $g_0(-\theta, \theta - u)$ зникає найшвидше з ростом θ : $g_0(-\theta, \theta - u) \sim O(\theta^{-3})$.

Поклавши $\theta = NT$ після аналізу приходимо до висновку, що складові дисперсії, зумовлені попереднім визначенням періоду мають порядок $O(N^{-2})$.

Вирази для статистичних характеристик оцінок функції математичного сподівання та його коефіцієнтів Фур'є, отримані вище можуть бути конкретизовані для окремих випадків ПНВС в залежності від довжини реалізації і параметрів сигналів отримані числові значення цих величин.

3.6. Оцінювання кореляційної функції та її коефіцієнтів Фур'є.

Розглянемо тепер оцінку кореляційної функції

$$\hat{b}(t, u) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t + n\hat{T}) \xi(t + u + n\hat{T}) - \hat{m}(t) \hat{m}(t + u), \quad (3.6.1)$$

де

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t + n\hat{T}),$$

а \hat{T} є оцінкою періоду нестационарності, отриманої за екстремумом статистики

$$\hat{m}(\tau, t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t + n\tau).$$

Покажемо, що оцінка (3.6.1) для Гаусових ПНВС при виконанні умови (3.11) є асимптотично незміщеною та слушною.

Перепишемо вираз (3.6.1) у вигляді

$$\begin{aligned} \hat{b}(t, u) = & \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} [\xi(t + nx) \xi(t + u + nx) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2N+1} \sum_{r=-N}^N \xi(t + nx) \xi(t + u + rx) \right] \delta(x - \hat{T}) dx. \end{aligned}$$

Оцінка періоду нестационарності в першому наближенні має вигляд:

$$\hat{T} = T - \frac{3}{N(N+1)(2N+1)m''(t)} \sum_{l=-N}^N \left[\frac{\partial \xi(t+ly)}{\partial y} \right]_{y=T}.$$

Приймаючи до уваги цей вираз, а також рівності (3.52) і (3.5.3), отримуємо:

$$\begin{aligned} \hat{b}(t,u) = & \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \left[\xi(t+nT)\xi(t+u+nT) - \frac{1}{2N+1} \sum_{l=-N}^N \xi(t+nT)\xi(t+u+lT) \right] - \\ & - \frac{3}{N(N+1)(2N+1)^2 m''(t)} \left[\sum_{n,l=-N}^N \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\overset{\circ}{\xi}(t+ly)\xi(t+nx)\xi(t+u+nx) \right] \right]_{x=T}^{y=T} - \\ & \times \sum_{n,r,l=-N}^N \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\overset{\circ}{\xi}(t+ly)\xi(t+nx)\xi(t+u+nx) \right] \right]_{x=T}^{y=T}. \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Перші дві складові цього співвідношення визначають оцінку кореляційної функції при відомому періоді нестационарності [111].

Виходячи з (3.6.2) для зміщення оцінки (3.6.1)

$\varepsilon[\hat{b}(t,u)] = E\hat{b}(t,u) - b(t,u)$ знаходимо:

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{b}(t,u)] = & -\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|n|}{2N+1} \right) b(t,u+nT) + \frac{3}{N(N+1)(2N+1)^2 m''(t)} \times \\ & \times \sum_{n,r=-N}^N n \left[m'(t) \left[\frac{\partial}{\partial y} b(t+ry, u+nT-ry) \right]_{y=T} + m'(t+u) \left[\frac{\partial}{\partial y} b(t+ry, nT-ry) \right]_{y=T} \right] + \\ & + O(N^{-1}). \end{aligned}$$

Як показує аналіз, що ця величина має порядок $O(N^{-1})$.

Дисперсію оцінки кореляційної функції обчислимо, нехтуючи складовими, зумовленими попереднім оцінюванням функції математичного сподівання. Ці складові, як впливає з аналізу, проведеного у [111],

приводять до появи у формулі для дисперсії складових вищого порядку малості. Відтак покладемо:

$$\hat{b}(t,u) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \overset{\circ}{\xi}(t+n\hat{T}) \overset{\circ}{\xi}(t+u+n\hat{T}) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \overset{\circ}{\xi}(t+nT) \overset{\circ}{\xi}(t+u+nT) -$$

$$- \frac{3}{N(N+1)(2N+1)^2 m''(t)} \sum_{l,n=-N}^N \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\overset{\circ}{\xi}(t+ly) \overset{\circ}{\xi}(t+nx) \overset{\circ}{\xi}(t+u+nx) \right] \right]_{\substack{x=T \\ y=T}}.$$

Враховуючи, що для Гаусових ПНВС:

$$H(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = E \overset{\circ}{\xi}(s_1) \overset{\circ}{\xi}(s_2) \overset{\circ}{\xi}(s_3) \overset{\circ}{\xi}(s_4) \overset{\circ}{\xi}(s_5) \overset{\circ}{\xi}(s_6) = b(s_1, s_2 - s_1) \times$$

$$\times G(s_3, s_4, s_5, s_6) + b(s_1, s_3 - s_1) G(s_2, s_4, s_5, s_6) + b(s_1, s_4 - s_1) G(s_2, s_3, s_5, s_6) +$$

$$+ b(s_1, s_5 - s_1) G(s_2, s_3, s_4, s_6) + b(s_1, s_6 - s_1) G(s_2, s_3, s_4, s_5),$$

де

$$G(s_1, s_2, s_3, s_4) = b(s_1, s_2 - s_1) b(s_3, s_4 - s_3) + b(s_1, s_3 - s_1) b(s_2, s_4 - s_2) +$$

$$+ b(s_1, s_4 - s_1) b(s_2, s_3 - s_2),$$

для дисперсії оцінки (3.6.1) маємо:

$$D[\hat{b}(t,u)] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{2N+1} \right) \times$$

$$\times \left[b(t, nT) b(t+u, nT) + b(t, u+nT) b(t, u-nT) \right] +$$

$$+ \frac{9}{\left[N(N+1)(2N+1)^2 m''(t) \right]^2} \sum_{r,n=-N}^N \sum_{k,l=-N}^N \left[\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4} \times \right.$$

$$\left. \times H(t + zx_1, t + nx_2, t + u + nx_2, t + kx_3, t + lx_4, t + u + lx_4) \right]_{\substack{x_1=x_2=T \\ x_3=x_4=T}} + O(N^{-3})$$

Ця величина при виконанні умови (3.4.1) прямує до нуля, якщо $N \rightarrow \infty$, тобто оцінка (3.6.1) є слушною.

Оцінки зміщення кореляційних компонентів

$$\hat{B}_k(u) = \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) \xi(t+u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2\pi}{x}t} \delta(x-\hat{T}) dx \right] dt -$$

$$- \frac{1}{2N+1} \sum_{n,r=-N}^N \left[\frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t+rx) \xi(t+u+nx) e^{-i\frac{2\pi}{x}t} \delta(x-\hat{T}) dx \right] dt.$$

Після імовірнісного усереднення та перетворень для $\varepsilon[\hat{B}_k(u)]$ отримуємо:

$$\varepsilon[\hat{B}_k(u)] = \sum_{\substack{l \in Z \\ L \notin Z}} B_k(u) \frac{\sin(l-k)\omega_0\theta}{(l-k)\omega_0\theta} - \sum_{l \in Z} \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) B_l(u+nT) \right] \times$$

$$\times \frac{\sin(l-k)\omega_0\theta}{(l-k)\omega_0\theta} - \frac{3}{N(N+1)(2N+1)m''(t)} \times$$

$$\times \left[\frac{ik\omega_0}{T} \sum_{l=-N}^N \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} s \left[m(s+u) \left[\frac{\partial}{\partial x} b(t+lx, s-t-lx) \right]_{x=T} \right] + \right.$$

$$\left. + m(s) \left[\frac{\partial}{\partial x} b(t+lx, s-t-lx) \right]_{x=T} \right] ds + \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{l,n,r=-N}^N \left[\frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} e^{-ik\omega_0 s} \times \right.$$

$$\left. \times rm'(s+u) \left[b(s, t-s+lx-nT) \right]_{x=T} + nm'(s) \left[\frac{\partial}{\partial x} b(s+u, t-s-u+lx-rt) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} + \right.$$

$$\left. + m(s+u) \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} b(t+ly, s-t+nx-ly) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} + \right.$$

$$\left. + m(s) \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} b(t+ly, s-t+u+rx-ly) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} + \right.$$

$$\left. + \frac{ik\omega_0}{T} s \left[m(s+u) \left[\frac{\partial}{\partial x} b(s, t-s-nT+lx) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} + \right.$$

$$\left. + m(s) \left[\frac{\partial}{\partial x} b(s+u, t-s-u-rT+lx) \right]_{x=T} \right] ds + O(N^{-1}).$$

Дисперсію оцінок кореляційних компонентів обчислимо, виходячи з формули:

$$\hat{B}_k(u) = \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) e^{-ik\omega_0 t} dt -$$

$$- \frac{3ik\omega_0}{TN(N+1)(2N+1)m''(t)} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} s \left[\frac{\partial}{\partial x} \overset{\circ}{\xi}(s) \overset{\circ}{\xi}(s+u) \overset{\circ}{\xi}(t+nx) \right]_{x=T} e^{-ik\omega_0 s} ds.$$

Для дисперсії Гаусових ПНВС ми отримуємо вираз

$$D[\hat{B}_k(u)] = \frac{1}{\theta} \int_0^{2\theta} \left(1 - \frac{\tau}{2\theta}\right) \tilde{B}_0(\tau, u) \cos k\omega_0 \tau d\tau + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{\substack{l \in Z \\ l \neq Z}} \int_0^{2\theta} \tilde{B}_l(\tau, u) h_l(-\theta, \theta - u) \times$$

$$\times \cos k\omega_0 \tau d\tau + \frac{9k^2 \omega_0^2}{T^2 [N(N+1)(2N+1)m''(t)]^2} \sum_{n,r=-N}^N \frac{1}{4\theta^2} \int_{-\theta}^{\theta} s_1 s_1 \times$$

$$\times \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(s_1, s_1 + u, t + nx, s_2, s_2 + u, t + ry) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} e^{-ik\omega_0(s_2 - s_1)} ds_1 ds_2 + O(N^{-2}).$$

Відмітимо, що наведені вище формули для статистичних характеристик оцінок кореляційної функції та її коефіцієнтів Фур'є містять складові, які співпадають з тими, які присутні у випадку відомого періоду нестационарності, а також ті, які зумовлені його попереднім оцінюванням. Останні мають вищий порядок малості в порівнянні з основними членами.

3.7. Висновки до розділу 3.

Встановлено, що до періодичної нестационарності другого порядку (прихованої періодичності) призводять взаємні кореляції між модулюючими процесами, а автокореляційні функції цих процесів визначають нульовий кореляційний компонент ПНВС.

Отримано формули для зміщення і дисперсії оцінок періоду для когерентних та компонентних методів визначення прихованої періодичності, доведено асимптотичну незміщеність і слухність цих оцінок. На першому етапі аналізу експериментальних даних слід застосовувати когерентний метод, який аналізує весь спектр сигналу а для уточнення отриманих значень

оцінок використовувати компонентний метод, який дає можливість відфільтрувати незначні за величиною гармоніки.

Отримано формули для зміщення і дисперсії оцінок функції математичного сподівання ПНВС та її коефіцієнтів Фур'є, а також доведено асимптотичну незміщеність і слушність цих оцінок. Отримано формули для зміщення і дисперсії оцінок кореляційної функції ПНВС та її коефіцієнтів Фур'є, доведено асимптотичну незміщеність і слушність цих оцінок.

РОЗДІЛ 4

ВИЯВЛЕННЯ ПЕРІОДИЧНОЇ НЕСТАЦІОНАРНОСТІ СИГНАЛІВ У ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

4.1. Властивості спектральних характеристик ПНВС.

Важливою задачею при встановленні типу дефектів елементів і вузлів механічних систем є встановлення тої частотної області, в якій відбуваються періодичні зміни миттєвої спектральної густини $f(\omega, t)$. Такі зміни, як впливає з (3.3.3), визначаються спектральними компонентами $f_k(\omega)$, які в свою чергу, є суперпозицією зміщених по частоті на $l\omega_0$, $l \in Z$ спектральних густин стаціонарних випадкових процесів $\xi_k(t)$, які модулюють базисні гармоніки ПНВС представлені у вигляді (3.3.5):

$$f_k(\omega) = \sum_{l \in Z} f_{l-k, l}(\omega - l\omega_0).$$

Миттєва спектральна густина ПНВС $f(\omega, t)$ є комплекснозначною: $f(\omega, t) = \text{Re } f(\omega, t) - i \text{Im } f(\omega, t)$. Підставляючи представлення кореляційної функції у вигляді суми парної $b^+(t, u)$ і непарної $b^-(t, u)$ частин у співвідношення (3.3.2), тобто $b(t, u) = b^+(t, u) + b^-(t, u)$, отримуємо:

$$\text{Re } f(\omega, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} b^+(t, u) \cos \omega u du,$$

$$\text{Im } f(\omega, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} b^-(t, u) \sin \omega u du.$$

Враховуючи представлення (3.1.1) і рівності

$$b^+(t, u) = \frac{1}{2} [b(t, u) + b(t - u, u)],$$

$$b^-(t,u) = \frac{1}{2} [b(t,u) - b(t-u,u)],$$

для парної та непарної частин кореляційної функції маємо:

$$b^+(t,u) = B_0(u) + \frac{1}{2} \sum_{k \in N} \left[[B_k^c(u) + B_k^c(-u)] \cos k\omega_0 t + [B_k^s(u) + B_k^s(-u)] \sin k\omega_0 t \right]$$

$$b^-(t,u) = \frac{1}{2} \sum_{k \in N} \left[[B_k^c(u) - B_k^c(-u)] \cos k\omega_0 t + [B_k^s(u) - B_k^s(-u)] \sin k\omega_0 t \right].$$

Тоді розклади у ряди Фур'є для дійсної та уявної частини змінної у часі компоненти спектральної густини перепишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(\omega, t) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_0(u) \cos \omega u du + \sum_{k \in N} \left[\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^c(u) \cos \omega u du \right] \cos k\omega_0 t + \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^s(u) \cos \omega u du \right] \sin k\omega_0 t \right], \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} f(\omega, t) = \sum_{k \in N} \left[\cos k\omega_0 t \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^c(u) \sin \omega u du \right] + \sin k\omega_0 t \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^s(u) \sin \omega u du \right] \right]$$

З формули (3.3.4) випливає, що нульовий спектральний компонент і дійсна та уявна частини вищих компонентів визначаються співвідношеннями:

$$f_0(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_0(u) \cos \omega u du,$$

$$\operatorname{Re} f_k(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B_k^c(u) \cos \omega u - B_k^s(u) \sin \omega u] du,$$

$$\operatorname{Im} f_k(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B_k^c(u) \sin \omega u + B_k^s(u) \cos \omega u] du.$$

Звідси легко знаходимо, що

$$\operatorname{Re} f_k(\omega) + \operatorname{Re} f_k(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^c(u) \cos \omega u du, \quad (4.1.1)$$

$$\operatorname{Im} f_k(\omega) + \operatorname{Im} f_k(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^s(u) \cos \omega u du, \quad (4.1.2)$$

$$\operatorname{Re} f_k(\omega) - \operatorname{Re} f_k(-\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^s(u) \sin \omega u du,$$

$$\operatorname{Im} f_k(\omega) - \operatorname{Im} f_k(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^c(u) \sin \omega u du.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(\omega_0 t) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_0(u) \cos \omega u du + \sum_{k \in N} \left[\left[\operatorname{Re} f_k(\omega) + \operatorname{Re} f_k(-\omega) \right] \cos k \omega_0 t + \right. \\ & \left. + \left[\operatorname{Im} f_k(\omega) + \operatorname{Im} f_k(-\omega) \right] \sin k \omega_0 t \right], \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} f(\omega, t) = \sum_{k \in N} \left[\left[\operatorname{Im} f_k(\omega) - \operatorname{Im} f_k(-\omega) \right] \cos k \omega_0 t + \left[\operatorname{Re} f_k(-\omega) - \operatorname{Re} f_k(\omega) \right] \sin k \omega_0 t \right].$$

З наведених вище формул випливає, що частотний діапазон, в якому миттєва спектральна густина ПНВС змінюється за часом, визначається косинусними перетвореннями від косинусних і синусних кореляційних компонентів. Тому для визначення як частотного діапазону, в якому відбуваються часові зміни, так і періоду таких змін (чи базової частоти ПНВС), сформуємо статистики, які мають такий вигляд [211-213]:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_k^c(\omega, \omega_2) \\ \hat{f}_k^s(\omega, \omega_2) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \begin{Bmatrix} \hat{B}_k^c(u, \omega_2) \\ \hat{B}_k^s(u, \omega_2) \end{Bmatrix} \cos \omega u du, \quad (4.1.3)$$

де

$$\begin{Bmatrix} \hat{B}_k^c(u, \omega_2) \\ \hat{B}_k^s(u, \omega_2) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) \xi(t+u) \begin{Bmatrix} \cos k \omega_2 t \\ \sin k \omega_2 t \end{Bmatrix} dt,$$

а $k(u)$ - кореляційне вікно, яке має наступні властивості: $k(0) = 1$, $k(-u) = k(u)$, $k(u) \neq 0$ при $u \in [-u_m, u_m]$, $k(u) = 0$ при $u \notin [-u_m, u_m]$. Величина $\omega_2 \in$

невідомою, при цьому $\omega_2 = \frac{2\pi}{\tau}$, де τ - так званий пробний період. Нижче зупинимось на аналізі статистик (4.1.3).

4.2. Аналіз збіжності спектральних статистик ПНВС.

Виділимо в статистиці (4.1.3) детерміновані складові:

$$\begin{aligned} C_k(\omega, \omega_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) E\hat{B}_k^c(u, \omega_2) \cos \omega u du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} b(t, u) \cos k\omega_2 t dt \right] \cos \omega u du, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned} S_k(\omega, \omega_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) E\hat{B}_k^s(u, \omega_2) \cos \omega u du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} b(t, u) \sin k\omega_2 t dt \right] \cos \omega u du. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Після підстановки до цих співвідношень у (4.1.1) отримуємо:

$$\begin{aligned} C_k(\omega, \omega_2) &= I_0(k\omega_2, \theta) \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_0(u) \cos \omega u du \right] + \sum_{l \in \mathbb{N}} \left[\left[I_0(l\omega_0 + k\omega_2, \theta) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + I_0(l\omega_0 - k\omega_2, \theta) \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_l^c(u) \cos \omega u du \right] \right], \end{aligned}$$

$$S_k(\omega, \omega_2) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \left[\left[I_0(l\omega_0 - k\omega_2, \theta) - I_0(l\omega_0 + k\omega_2, \theta) \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_l^s(u) \cos \omega u du \right] \right]$$

де

$$I_0(\omega, \theta) = \frac{\sin \omega \theta}{\omega \theta}.$$

Якщо $\omega_\tau = \omega_0$ ($\tau = T$), то

$$C_k(\omega, \omega_0) = I_0(k\omega_0, \theta) \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_0(u) \cos \omega u du \right] + \sum_{l \in \mathbb{N}} \left[\left[I_0((k+l)\omega_0, \theta) + \right. \right.$$

$$+I_0((l-k)\omega_0, \theta) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_l^c(u) \cos \omega u du \right],$$

$$S_k(\omega, \omega_0) = \sum_{l \in N} \left[I_0((l-k)\omega_0, \theta) - I_0((l+k)\omega_0, \theta) \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_l^s(u) \cos \omega u du \right]$$

При великих θ складові, для яких $l \neq k$, будуть досить малими. При $l = k$ функція $I_0((l-k)\omega_0, \theta)$ вироджується в функцію одиничного стрибка. Тому в асимптотиці

$$C_k(\omega, \omega_0) = f_k^c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_k^c(u) \cos \omega u du,$$

$$S_k(\omega, \omega_0) = f_k^s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_k^s(u) \cos \omega u du.$$

Враховуючи представлення

$$k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) e^{i\omega_1 u} d\omega_1,$$

$$B_k^c(u) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} f_k(\omega_2) \cos \omega_2 u + \operatorname{Im} f_k(\omega_k) \sin \omega_2 u] d\omega_2,$$

$$B_k^s(u) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Im} f_k(\omega_2) \cos \omega_2 u - \operatorname{Re} f_k(\omega_k) \sin \omega_2 u] d\omega_2,$$

приходимо до співвідношень:

$$f_k^c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) \left[\operatorname{Re} f_k(\omega_\tau) \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 u} \cos \omega_2 u \cos \omega u du \right] + \right.$$

$$\left. \operatorname{Im} f_k(\omega_2) \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 u} \sin \omega_2 u \cos \omega u du \right] \right] d\omega_1 d\omega_2,$$

$$f_k^s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) \left[\operatorname{Im} f_k(\omega_2) \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 u} \cos \omega_2 u \cos \omega u du \right] - \right.$$

$$-\operatorname{Re} f_k(\omega_2) \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 u} \sin \omega_2 u \cos \omega u du \right] d\omega_1 d\omega_2.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \cos \omega_2 u \cos \omega u &= \frac{1}{2} [\cos(\omega_2 - \omega)u + \cos(\omega_2 + \omega)u] = \\ &= \frac{1}{4} [e^{i(\omega_2 - \omega)u} + e^{-i(\omega_2 - \omega)u} + e^{i(\omega_2 + \omega)u} + e^{-i(\omega_2 + \omega)u}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \omega_2 u \cos \omega u &= \frac{1}{2} [\sin(\omega_2 + \omega)u - \sin(\omega_2 - \omega)u] = \\ &= \frac{i}{4} [e^{-i(\omega_2 - \omega)u} - e^{i(\omega_2 - \omega)u} - e^{-i(\omega_2 + \omega)u} + e^{i(\omega_2 + \omega)u}], \end{aligned}$$

а також

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 - \omega_2 - \omega)u} du = f(\omega_1 - \omega_2 - \omega),$$

то

$$\begin{aligned} f_k^c(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) [\operatorname{Re} f_k(\omega_2) [\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) + \delta(\omega_1 + \omega - \omega_2) + \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega) + \\ &+ \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega)] + i \operatorname{Im} f_k(\omega_2) [\delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega) - \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega) - \\ &- \delta(\omega_1 - \omega_2 + \omega) + \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega)]] d\omega_1 d\omega_2 = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\lambda(\omega + \omega_1) + \lambda(\omega_1 - \omega)] \operatorname{Re} f_k(\omega_1) d\omega_1,$$

$$\begin{aligned} f_k^s(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) [\operatorname{Im} f_k(\omega_2) [\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) + \delta(\omega_1 + \omega - \omega_2) + \\ &+ \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega) + \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega)] - i \operatorname{Re} f_k(\omega_2) \times \\ &\times [\delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega) - \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega) - \delta(\omega_1 - \omega_2 + \omega) + \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega)]] d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\lambda(\omega + \omega_1) + \lambda(\omega_1 - \omega)] \operatorname{Im} f_k(\omega_1) d\omega_1. \end{aligned}$$

Припустимо, що функції $\operatorname{Re} f_k(\omega)$ і $\operatorname{Im} f_k(\omega)$ мало змінюються на ширині спектрального вікна. Тоді величини $f_k^c(\omega)$ і $f_k^s(\omega)$ мало відрізняються від (4.1.1) і (4.1.2):

$$f_k^c(\omega) \approx \operatorname{Re} f_k(\omega) + \operatorname{Re} f_k(-\omega),$$

$$f_k^s(\omega) \approx \operatorname{Im} f_k(\omega) + \operatorname{Im} f_k(-\omega).$$

Проаналізуємо тепер флуктуаційні складові статистик (4.1.3), тобто величини

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} N_k^c(\omega, \omega_\tau) \\ N_k^s(\omega, \omega_\tau) \end{array} \right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left[\overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) - b(t, u) \right] \begin{cases} \cos k\omega_2 t \\ \sin k\omega_2 t \end{cases} dt \right] \times \\ &\quad \times \cos \omega u du. \end{aligned}$$

Їх математичні сподівання, очевидно, дорівнюють нулю, а середньоквадратичні значення (а отже і дисперсії) при $\omega_2 = \omega_0$ визначаються виразами

$$\begin{aligned} E \left[N_k^c(\omega_1, \omega_0) \right]^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[\frac{1}{\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b_\zeta(t, s-t, u_1, u_2) \cos k\omega_0 t \cos k\omega_0 s dt ds \right] \times \\ &\quad \times \cos \omega u_1 \cos \omega u_2 du_1 du_2, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

$$\begin{aligned} E \left[N_k^s(\omega, \omega_0) \right]^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[\frac{1}{\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b_\zeta(t, s-t, u_1, u_2) \sin k\omega_0 t \sin k\omega_0 s dt ds \right] \times \\ &\quad \times \cos \omega u_1 \cos \omega u_2 du_1 du_2, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

де $b_\zeta(t, s-t, u_1, u_2)$ - кореляційна функція випадкового процесу

$$\zeta(t, u) = \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) - b(t, u):$$

$$b_\zeta(t, s-t, u_1, u_2) = E \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u_1) \overset{\circ}{\xi}(s) \overset{\circ}{\xi}(s+u_2) - b(t, u_1) b(s, u_2).$$

Для Гаусових ПНВС:

$$\begin{aligned} b_\zeta(t, s-t, u_1, u_2) &= b(t, s-t) b(t+u_1, s-t+u_2-u_1) + \\ &\quad + b(t, s-t+u_2) b(t+u_1, s-t-u_1) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Вираз для кореляційної функції $b_\zeta(t, s-t, u_1, u_2)$ також можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} b_\zeta(t, s-t, u_1, u_2) &= E \overset{\circ}{\xi}(s) \overset{\circ}{\xi}(s+u_2) \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u_1) - b(s, u_2) b(t, u_1) = \\ &= b(t, t-s) b(s+u_2, t-s+u_1-u_2) + b(s, t-s+u_1) b(s+u_2, t-s-u_2) = \\ &= b_\zeta(s, t-u, u_1, u_2) \end{aligned}$$

Покладемо $s-t=u$, тоді

$$\begin{aligned} b_\zeta(t+u, u, u_1, u_2) &= b(t+u, -u) b(t+u+u_2, -u+u_1-u_2) + b(t+u, -u+u_1) \times \\ &\times b(t+u+u_2, -u-u_2). \end{aligned}$$

Врахувавши, що

$$\begin{aligned} b(t+u_1, -u) &= b(t, u), \quad b(t+u+u_2, -u+u_1-u_2) = b(t+u_1, u+u_2-u_1), \\ b(t+u, -u+u_1) &= b(t+u_1, u-u_1), \quad b(t+u+u_2, -u-u_2) = b(t, u+u_2) \end{aligned}$$

приходимо до рівності

$$b_\zeta(t+u, -u, u_1, u_2) = b(t, u, u_1, u_2)$$

або

$$b_\zeta(t, -u, u_1, u_2) = b(t-u, u, u_1, u_2).$$

Використаємо отриманий результат при спрощенні подвійних інтегралів у співвідношеннях (4.2.3) і (4.2.4). Для першого після заміни $s-t=u$ маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta^2} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} b_\zeta(t, s-t, u_1, u_2) \cos k\omega_0 t \cos k\omega_0 s dt ds &= \frac{1}{\theta^2} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta-t}^{\theta-t} b_\zeta(t, u, u_1, u_2) \times \\ &\times \cos k\omega_0 t \cos k\omega_0 (t+u) du dt. \end{aligned}$$

Змінимо порядок інтегрування (Рис. 4.2.1):

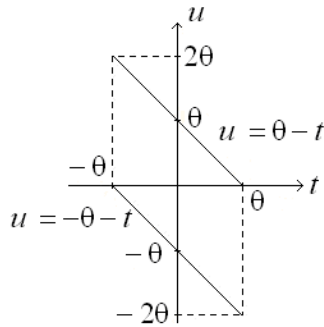


Рис. 4.2.1 Графічне пояснення зміни порядку інтегрування

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta^2} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta-t}^{\theta-t} b_{\zeta}(t, u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 t \cos k\omega_0(t+u) du dt = \\ = \frac{1}{\theta^2} \left[\int_{-2\theta}^0 \int_{-\theta-u}^{\theta} b_{\zeta}(t, u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 t \cos k\omega_0(t+u) du dt + \right. \\ \left. + \int_0^{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta-u} b_{\zeta}(t, u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 t \cos k\omega_0(t+u) du dt \right]. \end{aligned}$$

У першому подвійному інтегралі зробимо наступні зміни. Спочатку введемо нову змінну інтегрування $\tau = -u$ і прийнемо до уваги рівність $b_{\zeta}(t, -\tau, u_1, u_2) = b_{\zeta}(t - \tau, u, u_1, u_2)$, а потім замість t введемо $s = t - \tau$:

$$\begin{aligned} \int_{-2\theta}^0 \int_{-\theta-u}^{\theta} b_{\zeta}(t, u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 t \cos k\omega_0(t+u) du dt = \int_0^{2\theta} \int_{-\theta+\tau}^{\theta} b_{\zeta}(t - \tau, \tau, u_1, u_2) \cos k\omega_0 t \times \\ \times \cos k\omega_0(t - \tau) dt d\tau = \int_0^{2\theta} \int_{-\theta+\tau}^{\theta} b_{\zeta}(s, \tau, u_1, u_2) \cos k\omega_0(s + \tau) \cos k\omega_0 s ds d\tau. \end{aligned}$$

Відтак, в результаті проведених перетворень маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta^2} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} b_{\zeta}(t, s - t, u_1, u_2) \cos k\omega_0 t \cos k\omega_0 s dt ds = \\ \times \frac{1}{\theta^2} \int_0^{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta-u} b_{\zeta}(t, u, u_1, u_2) [\cos k\omega_0 u + \cos k\omega_0(2t + u)] dt du. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Подальші спрощення цього виразу проведемо, представляючи у вигляді ряду Фур'є кореляційну функцію $b_{\zeta}(t, u, u_1, u_2)$:

$$b_{\zeta}(t, u, u_1, u_2) = \sum_{r \in Z} \tilde{B}_l(u, u_1, u_2) e^{ir\omega_0 t}. \quad (4.2.7)$$

Коефіцієнти Фур'є цього ряду, виходячи з (4.2.5), можна представити у вигляді:

$$\tilde{B}_l(u, u_1, u_2) = \sum_{l \in Z} [B_{l+r}(u)B_{-l}(u+u_2-u_1) + B_{l+r}(u)B_{-l}(u-u_1)]e^{-il\omega_0 u_1}. \quad (4.2.8)$$

Тоді:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta^2} \int_0^{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta-u} b_\zeta(t, u, u_1, u_2) [\cos k\omega_0 u + \cos k\omega_0(2t+u)] dt du = \\ & = \frac{1}{\theta^2} \sum_{r \in Z} \int_0^{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta-u} \tilde{B}_r(u, u_1, u_2) [2f_r(-\theta, \theta-u) \cos k\omega_0 u + f_{r+2k}(-\theta, \theta-u) e^{ik\omega_0 u} + \\ & \quad + f_{r-2k}(-\theta, \theta-u) e^{-ik\omega_0 u}] du, \end{aligned}$$

де

$$f_r(\theta, \theta-u) = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta-u} e^{ir\omega_0 t} dt.$$

Складові отриманого виразу, які залежать від функцій $f_r(-\theta, \theta-u)$ при $r \neq 0$, мають вищий порядок малості, ніж ті, що визначаються $f_0(-\theta, \theta-u)$. Нехтуючи першими, для середньоквадратичного значення (4.2.3) отримуємо:

$$\begin{aligned} E[N_k^c(\omega_1, \omega_0)]^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1)k(u_2) \left[\frac{1}{\theta} \int_0^{2\theta} \left(1 - \frac{u}{2\theta}\right) [2\tilde{B}_0(u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 u + \right. \\ & \quad \left. + \tilde{B}_{2k}^s(u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 u - \tilde{B}_{2k}^s(u, u_1, u_2) \sin k\omega_0 u] du \right] \cos \omega u_1 \cos \omega u_2 du_1 du_2, \end{aligned}$$

при цьому прийнято, що $\tilde{B}_{2k}(u, u_1, u_2) = \frac{1}{2} [\tilde{B}_{2k}^c(u, u_1, u_2) - i\tilde{B}_{2k}^s(u, u_1, u_2)]$. Формулу (4.2.4) перетворимо аналогічним чином. Після спрощення внутрішнього подвійного інтегралу приходимо до співвідношення:

$$\begin{aligned} E[N_k^s(\omega_1, \omega_0)]^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1)k(u_2) \left[\frac{1}{\theta^2} \int_0^{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta-u} b_\zeta(t, u, u_1, u_2) [\cos k\omega_0 u - \right. \\ & \quad \left. - \cos k\omega_0(2t+u)] dt du \right] \cos \omega u_1 \cos \omega u_2 du_1 du_2. \end{aligned}$$

Внутрішній інтеграл відрізняється від (4.2.6) тільки знаком перед другою складовою. Тому:

$$E\left[N_k^s(\omega_1, \omega_0)\right]^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1)k(u_2) \left[\frac{1}{\theta^2} \int_0^{2\theta} \left(1 - \frac{u}{2\theta}\right) \left[2\tilde{B}_0(u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 u - \right. \right. \\ \left. \left. - \tilde{B}_{2k}^c(u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 u + \tilde{B}_{2k}^s(u, u_1, u_2) \sin k\omega_0 u \right] du \right] \cos \omega u_1 \cos \omega u_2 du_1 du_2.$$

Якщо кореляційні зв'язки ПНВС зникають з ростом зсуву u , тобто виконуються граничні рівності

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} B_0(u) = 0, \quad \lim_{|u| \rightarrow \infty} B_k^{c,s}(u) = 0 \quad \forall k \in Z, \quad (4.2.9)$$

то, як випливає з виразу (4.11), величини $\tilde{B}_0(u, u_1, u_2)$ і $\tilde{B}_k^{c,s}(u, u_1, u_2)$ теж прямують до нуля при $|u| \rightarrow \infty$. А це означає, що за умов (4.2.9) середньоквадратичні значення $E\left[N_k^{c,s}(\omega, \omega_0)\right]^2 \rightarrow 0$, якщо $\theta \rightarrow \infty$. Відтак, статистики (4.1.3) в середньоквадратичному збігаються до своїх середніх значень:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} E\left[\hat{f}_k^c(\omega, \omega_0) - C_k(\omega, \omega_0)\right]^2 = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} E\left[\hat{f}_k^s(\omega, \omega_0) - S_k(\omega, \omega_0)\right]^2 = 0.$$

Точки екстремальних значень $C_k(\omega, \omega_2)$ і $S_k(\omega, \omega_2)$ при великих θ мало відрізнятимуться від ω_0 . Присутність флуктуаційних складових при таких θ також незначно впливатимуть на точки екстремумів. Тому за оцінки основної частоти ω_0 можуть бути прийняті точки екстремальних значень статистик (4.1.3). Далі проведено аналіз таких оцінок.

4.3. Властивості оцінок базової частоти ПНВС.

Аналіз властивостей оцінок періоду проведемо шляхом розв'язку нелінійних рівнянь:

$$\frac{df_k^c(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} = 0, \quad \frac{df_k^s(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} = 0$$

Виконання цих рівнянь є необхідною умовою існування екстремумів. Перепишемо рівняння у формі:

$$\frac{d\tilde{C}_k(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} + \gamma_1 \frac{d\tilde{N}_k^c(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} = 0, \quad (4.3.1)$$

$$\frac{d\tilde{S}_k(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} + \gamma_2 \frac{d\tilde{N}_k^s(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} = 0, \quad (4.3.2)$$

де

$$\tilde{C}_k(\omega, \omega_2) = \frac{C_k(\omega, \omega_2)}{C_k(\omega, \omega_0)},$$

$$\tilde{N}_k^c(\omega, \omega_2) = \frac{N_k^c(\omega, \omega_2)}{\sqrt{E[N_k^c(\omega, \omega_0)]^2}},$$

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{E[N_k^c(\omega, \omega_0)]^2}}{C_k(\omega, \omega_0)},$$

$$\tilde{S}_k(\omega, \omega_2) = \frac{S_k(\omega, \omega_2)}{S_k(\omega, \omega_0)},$$

$$\tilde{N}_k^s(\omega, \omega_2) = \frac{N_k^s(\omega, \omega_2)}{\sqrt{E[N_k^s(\omega, \omega_0)]^2}},$$

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{E[N_k^s(\omega, \omega_0)]^2}}{S_k(\omega, \omega_0)}.$$

Величини γ_1 і γ_2 прянують до нуля при $\theta \rightarrow \infty$ і виконанні умов (4.2.9), а їх значення при великих θ є малими. Тому розв'язки рівнянь (4.3.1) і (4.3.2) представимо у вигляді степеневих рівнянь за малими параметрами γ_1 і γ_2 :

$$\hat{\omega}_2^c = \omega_0^c + \gamma_1 \omega_1^c + \gamma_1^2 \omega_2^c + \dots \quad (4.3.3)$$

$$\hat{\omega}_2^s = \omega_0^s + \gamma_1 \omega_1^s + \gamma_1^2 \omega_2^s + \dots \quad (4.3.4)$$

Ліві частини рівнянь (4.3.1) і (4.3.2) представимо у вигляді рядів Тейлора:

$$\left[\frac{d\tilde{C}_k(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} + \gamma_1 \frac{d\tilde{N}_k^c(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} \right]_{\omega_s=\omega_0} + \left[\frac{d^2\tilde{C}_k(\omega, \omega_2)}{d\omega_2^2} + \gamma_1 \frac{d^2\tilde{N}_k^c(\omega, \omega_2)}{d\omega_2^2} \right]_{\omega_s=\omega_0} \times$$

$$\times (\hat{\omega}_2^c - \omega_0) + \dots = 0, \quad (4.3.5)$$

$$\left[\frac{d\tilde{S}_k(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} + \gamma_2 \frac{d\tilde{N}_k^s(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} \right]_{\omega_s=\omega_0} + \left[\frac{d^2\tilde{S}_k(\omega, \omega_2)}{d\omega_2^2} + \gamma_2 \frac{d^2\tilde{N}_k^s(\omega, \omega_2)}{d\omega_2^2} \right]_{\omega_s=\omega_0} \times \\ \times (\hat{\omega}_2^s - \omega_0) + \dots = 0. \quad (4.3.6)$$

Введемо позначення

$$S_i^c = \left[\frac{d^i \tilde{C}_k(\omega, \omega_2)}{d\omega_2^i} \right]_{\omega_2=\omega_0}, \quad n_i^c = \left[\frac{d^i \tilde{N}_k^c(\omega, \omega_2)}{d\omega_2^i} \right]_{\omega_2=\omega_0}, \\ S_i^s = \left[\frac{d^i \tilde{S}_k(\omega, \omega_2)}{d\omega_2^i} \right]_{\omega_2=\omega_0}, \quad n_i^s = \left[\frac{d^i \tilde{N}_k^s(\omega, \omega_2)}{d\omega_2^i} \right]_{\omega_2=\omega_0}$$

і підставимо до рівнянь (4.3.1) і (4.3.2) ряди (4.3.3)–(4.3.6). Отримані співвідношення будуть виконуватись, якщо коефіцієнти при відповідних степенях малих параметрів γ_1 і γ_2 є рівними нулю:

$$S_1^{c,s} + S_2^{c,s} \Delta\omega_{c,s} + \frac{1}{2} S_3^{c,s} \Delta\omega_{c,s}^2 + \dots = 0, \\ n_1^{c,s} + S_2^{c,s} \omega_1^{c,s} + n_2^{c,s} \Delta\omega_{c,s}^2 + \dots = 0 \dots$$

Тут $\Delta\omega_{c,s} = \omega_0^{c,s} - \omega_0$. З виведених рівнянь отримуємо формули для різниць $\Delta\omega_{c,s}$ і наближень $\omega_1^{c,s}$, $\omega_2^{c,s}$, ..., на основі яких знаходимо зміщення $\varepsilon[\hat{\omega}_2^{c,s}] = E\hat{\omega}_\tau^{c,s} - \omega_0$ та дисперсії $E[\hat{\omega}_2^{c,s} - E\hat{\omega}_2^{c,s}]$ оцінок. У першому наближенні:

$$\varepsilon[\hat{\omega}_2^{c,s}] = -\frac{S_1^{c,s}}{S_2^{c,s}}, \quad D[\hat{\omega}_\tau^{c,s}] = \gamma_{1,2}^2 \frac{E(n_1^{c,s})^2}{(S_2^{c,s})^2}. \quad (4.3.7)$$

Конкретизуємо ці вирази. Виходячи з (4.2.1) і (4.2.2), маємо:

$$S_1^c = -\frac{k}{2\pi f_k^s(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} tb(t,u) \sin k\omega_2 t dt \right] \cos \omega u du, \\ S_1^s = -\frac{k}{2\pi f_k^s(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} tb(t,u) \cos k\omega_2 t dt \right] \cos \omega u du,$$

$$S_2^c = -\frac{k^2}{2\pi f_k^c(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} t^2 b(t,u) \cos k\omega_2 t dt \right] \cos \omega u du, \quad (4.3.8)$$

$$S_2^s = -\frac{k^2}{2\pi f_k^s(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} t^2 b(t,u) \sin k\omega_2 t dt \right] \cos \omega u du. \quad (4.3.9)$$

Звідси

$$\varepsilon[\hat{\omega}_2^c] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\int_{-\theta}^{\theta} t b(t,u) \sin k\omega_0 t dt \right] \cos \omega u du}{k \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\int_{-\theta}^{\theta} t^2 b(t,u) \cos k\omega_0 t dt \right] \cos \omega u du}, \quad (4.3.10)$$

$$\varepsilon[\hat{\omega}_2^s] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\int_{-\theta}^{\theta} t b(t,u) \cos k\omega_0 t dt \right] \cos \omega u du}{k \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\int_{-\theta}^{\theta} t^2 b(t,u) \sin k\omega_0 t dt \right] \cos \omega u du}. \quad (4.3.11)$$

Внутрішні інтеграли, що містяться у чисельниках і знаменниках цих виразів обчислимо, представивши кореляційну функцію рядом Фур'є (3.1.1). Маємо:

$$\int_{-\theta}^{\theta} t b(t,u) \sin k\omega_0 t dt = 2B_0(u) I_1(k\omega_0, \theta) + \sum_{r \in N} B_r^c(u) [I_1[(r+k)\omega_0, \theta] + I_1[(r-k)\omega_0, \theta]], \quad (4.3.12)$$

$$\int_{-\theta}^{\theta} t b(t,u) \cos k\omega_0 t dt = \sum_{r \in N} B_r^s(u) [I_1[(r+k)\omega_0, \theta] + I_1[(r-k)\omega_0, \theta]], \quad (4.3.13)$$

$$\int_{-\theta}^{\theta} t^2 b(t,u) \cos k\omega_0 t dt = 2B_0(u) I_2(k\omega_0, \theta) + \sum_{r \in N} B_r^c(u) [I_2[(r+k)\omega_0, \theta] + I_2[(r-k)\omega_0, \theta]], \quad (4.3.14)$$

$$\int_{-\theta}^{\theta} t^2 b(t,u) \sin k\omega_0 t dt = \sum_{r \in N} B_r^s(u) [I_2[(r+k)\omega_0, \theta] - I_2[(r-k)\omega_0, \theta]]. \quad (4.3.15)$$

Тут позначено

$$I_1(r\omega_0, \theta) = \frac{1}{2} \int_{-\theta}^{\theta} t \sin r\omega_0 t dt = \frac{\sin r\omega_0 \theta}{(r\omega_0)^2} - \frac{\theta \cos r\omega_0 \theta}{r\omega_0},$$

$$I_2(r\omega_0, \theta) = \frac{1}{2} \int_{-\theta}^{\theta} t^2 \cos r\omega_0 t dt = \frac{2\theta}{(r\omega_0)^2} \cos r\omega_0 \theta + \left(\frac{\theta^2}{r\omega_0} - \frac{2}{(r\omega_0)} \right) \sin r\omega_0 \theta.$$

Відмітимо, що $I_1(0, \theta) = 0$, $I_2(0, \theta) = \frac{\theta^3}{3}$. Врахувавши співвідношення (4.3.12)–

(4.3.15) отримуємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{\omega}_2^c] = & \left[2I_1(k\omega_0, \theta) \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_0(u) \cos \omega u du + \right. \\ & \left. + \sum_{r \in N} \left[I_1[(r+k)\omega_0, \theta] + I_1[(r-k)\omega_0, \theta] \right] \times \right. \\ & \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_2^c(u) \cos \omega u du \left[k \left[2I_2(k\omega_0, \theta) \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_0(u) \cos \omega u du + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{r \in N} \left[I_2[(r+k)\omega_0, \theta] + I_2[(r-k)\omega_0, \theta] \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_r^c(u) \cos \omega u du \right] \right] \right]^{-1}, \quad (4.3.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{\omega}_2^s] = & \left[\sum_{r \in N} \left[I_1[(r+k)\omega_0, \theta] I_1[(r-k)\omega_0, \theta] + \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_r^s \cos \omega u du \right] \right] \times \\ & \times \left[r \sum_{r \in N} \left[I_2((r-k)\omega_0, \theta) - I_2((r+k)\omega_0, \theta) \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_r^s(u) \cos \omega u du \right] \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

З отриманих виразів випливає, що зміщення оцінки, яка знаходиться за статистикою (4.2.1), залежить від нульового і косинусних кореляційних компонентів, а за статистикою (4.2.2) – від синусних кореляційних компонентів. Обидві величини є обернено пропорційними до номера гармоніки, за якою проводиться оцінювання. У знаменниках зміщень найшвидше зі збільшенням довжини реалізації θ ростуть складові з номером $r=k$, їх порядок $O(\theta^3)$. Оскільки порядок чисельника $O(\theta)$, то обидва зміщення мають порядок $O(\theta^{-2})$.

Виразимо величини (4.3.16) і (4.3.17) через спектральні характеристики ПНВС. Вище було показано, що для вузьких спектральних вікон

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_r^c(u) \cos \omega u du \approx \operatorname{Re} f_r(\omega) + \operatorname{Re} f_r(-\omega),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_r^s(u) \cos \omega u du \approx \operatorname{Im} f_r(\omega) + \operatorname{Im} f_r(-\omega).$$

У цьому випадку, врахувавши, що

$$B_0(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\omega) e^{i\omega u} d\omega,$$

також маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_0(u) \cos \omega u du &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) f_0(\omega_2) \left[\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1+\omega_2)u} (e^{i\omega u} + \right. \\ &\left. + e^{-i\omega u}) du \right] d\omega_1 d\omega_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\lambda(\omega_1 + \omega) + \lambda(\omega_1 - \omega)] f_0(\omega_1) d\omega_1 \approx f_0(\omega). \end{aligned}$$

Отже:

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{\omega}_2^c] &= \left[2I_1(k\omega_0, \theta) f_0(\omega) + \sum_{r \in N} \left[I_1((r+k)\omega_0, \theta) + I_1((r-k)\omega_0, \theta) \right] \right] \times \\ &\times \left[\operatorname{Re} f_k(\omega) + \operatorname{Re} f_k(-\omega) \right] \times \left[k \left[2I_2(k\omega_0, \theta) f_0(\omega) + \sum_{r \in N} \left[I_2((r+k)\omega_0, \theta) + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + I_2((r-k)\omega_0, \theta) \right] \left[\operatorname{Re} f_k(\omega) + \operatorname{Re} f_k(-\omega) \right] \right] \right]^{-1}, \\ \varepsilon[\hat{\omega}_2^s] &= \frac{\sum_{r \in N} \left[I_1((r+k)\omega_0, \theta) + I_1((r-k)\omega_0, \theta) \right] \left[\operatorname{Im} f_k(\omega) + \operatorname{Im} f_k(-\omega) \right]}{k \sum_{r \in N} \left[I_2((r+k)\omega_0, \theta) + I_2((r-k)\omega_0, \theta) \right] \left[\operatorname{Im} f_k(\omega) + \operatorname{Im} f_k(-\omega) \right]}. \end{aligned}$$

У знаменниках цих виразів найбільшими є складові з номерами $r = k$, а саме

$$\frac{k\theta^3}{3} \left[\operatorname{Re} f_k(\omega) + \operatorname{Re} f_k(-\omega) \right] \quad \text{і} \quad \frac{k\theta^3}{3} \left[\operatorname{Im} f_k(\omega) + \operatorname{Im} f_k(-\omega) \right].$$

Складові чисельника з тим самим номером є на два порядки меншими.

Виходячи з виразу (4.3.7), знайдемо тепер дисперсії оцінок. Врахувавши, що:

$$\frac{dN_k^c(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} = -\frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} t \overset{\circ}{\zeta}(t, u) \sin k\omega_2 t dt \right] \cos \omega u du ,$$

$$\frac{dN_k^s(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} t \overset{\circ}{\zeta}(t, u) \cos k\omega_2 t dt \right] \cos \omega u du ,$$

де $\overset{\circ}{\zeta}(t, u) = \overset{\circ}{\zeta}(t) \overset{\circ}{\zeta}(t+u) - b(t, u)$, та співвідношення (4.3.8), (4.3.9) отримуємо:

$$D[\hat{\omega}_2^c] = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[\frac{1}{\theta^2} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} t s b_{\zeta}(t, s-t, u_1, u_2) \sin k\omega_0 t \sin k\omega_0 s dt ds \right] \times \right. \\ \left. \times \cos \omega u_1 \cos \omega u_2 du_1 du_2 \right] \times \\ \times \left[k^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} t^2 b(t, u) \cos k\omega_0 t dt \right] \cos \omega u du \right]^2 \right]^{-1} , \quad (4.3.18)$$

$$D[\hat{\omega}_2^s] = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[\frac{1}{\theta^2} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} t s b_{\zeta}(t, s-t, u_1, u_2) \cos k\omega_0 t \cos k\omega_0 s dt ds \right] \times \right. \\ \left. \times \cos \omega u_1 \cos \omega u_2 du_1 du_2 \right] \times \\ \times \left[k^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} k(u) \left[\frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} t^2 b(t, u) \sin k\omega_0 t dt \right] \cos \omega u du \right]^2 \right]^{-1} . \quad (4.3.19)$$

Спростимо внутрішні подвійні інтеграли, які знаходяться у чисельниках цих виразів. Введемо нову змінну $u = s - t$ і змінимо порядок інтегрування. Тоді для першого з цих інтегралів маємо:

$$I_1 = \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} t s b_{\zeta}(t, s-t, u_1, u_2) \sin k\omega_0 t \sin k\omega_0 s dt ds = \\ = \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta-t}^{\theta} (t+u) t b_{\zeta}(t, u, u_1, u_2) \sin k\omega_0 t \sin k\omega_0 (t+u) du dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2\theta}^0 \int_{-2\theta-u}^{\theta} (t+u)tb_{\zeta}(t,u,u_1,u_2)\sin k\omega_0t \sin k\omega_0(t+u)dtdu + \\
&\quad + \int_0^{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta-u} (t+u)tb_{\zeta}(t,u,u_1,u_2)\sin k\omega_0t \sin k\omega_0(t+u)dtdu .
\end{aligned}$$

Перший подвійний інтеграл можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\theta} \int_{-\theta+u}^{\theta} (t-u)tb_{\zeta}(t,-u,u_1,u_2)\sin k\omega_0t \sin k\omega_0(t-u)dtdu = \\
&= \int_0^{2\theta} \int_{-\theta+u}^{\theta} (t-u)tb_{\zeta}(t,-u,u_1,u_2)\sin k\omega_0t \sin k\omega_0(t-u)dtdu = \\
&= \int_0^{2\theta} \int_{-\theta+u}^{\theta} t(t+u)b_{\zeta}(t,u,u_1,u_2)\sin k\omega_0t \sin k\omega_0(t+u)dtdu .
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2 \int_0^{2\theta} \int_{-\theta+u}^{\theta} t(t+u)b_{\zeta}(t,u,u_1,u_2)\sin k\omega_0t \sin k\omega_0(t+u)dtdu = \\
&= \int_0^{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} t(t+u)b_{\zeta}(t,u,u_1,u_2)[\cos k\omega_0u - \cos k\omega_0(2t+u)]dtdu . \quad (4.3.20)
\end{aligned}$$

Підставивши сюди ряд Фур'є (4.2.7), маємо:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\theta} \tilde{B}_r(u,u_1,u_2) \left[\int_{-\theta}^{\theta-u} (t^2 + tu) \left[e^{ir\omega_0t} \cos k\omega_0u - \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_0u} \times \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times e^{i(r+2k)\omega_0t} + e^{-ik\omega_0u} e^{-i(r-2k)\omega_0t} \right] \right] dt \right] du .
\end{aligned}$$

Введемо функції

$$g_1(r\omega_0\theta, u) = \int_{-\theta}^{\theta-u} te^{ir\omega_0t} dt, \quad g_2(r\omega_0\theta, u) = \int_{-\theta}^{\theta-u} t^2 e^{ir\omega_0t} dt .$$

Тоді

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\theta} \tilde{B}_r(u,u_1,u_2) \left[g_2(r\omega_0\theta, u) \cos k\omega_0u - \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_0u} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times g_2((r+2k)\omega_0\theta, u) + e^{-ik\omega_0u} g_2((r-2k)\omega_0\theta, u) \right] + u \left[g_1(r\omega_0\theta, u) \cos k\omega_0u - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_0 u} g_1((r+2k)\omega_0\theta, u) + e^{-ik\omega_0 u} g_1((r-2k)\omega_0\theta, u) \right] du.$$

В асимптотиці залишимо тільки ті члени, які залежать від

$$g_2(r\omega_0\theta, u) = \int_{-\theta}^{\theta-u} t^2 e^{ir\omega_0 t} dt = \frac{1}{3}(\theta-u)^3 + \frac{\theta^3}{3} \approx \frac{2\theta^3}{3}. \text{ Вони найшвидше ростуть з}$$

ростом довжини реалізації. У цьому випадку:

$$I_1 = \frac{2}{3} \theta^3 \int_0^{2\theta} \left[\tilde{B}_0(u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 u - \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_0 u} \tilde{B}_{-2k}(u, u_1, u_2) + e^{-ik\omega_0 u} \tilde{B}_{2k}(u, u_1, u_2) \right] \right] du$$

Оскільки

$$\tilde{B}_0(-u, u_1, u_2) = \tilde{B}_0(u, u_1, u_2), \quad \tilde{B}_{-2k}(-u, u_1, u_2) e^{-ik\omega_0 u} = \tilde{B}_{-2k}(u, u_1, u_2) e^{ik\omega_0 u},$$

то цей інтеграл можна переписати у вигляді:

$$I_1 = \frac{\theta^3}{3} \int_{-2\theta}^{2\theta} \left[\tilde{B}_0(u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 u - \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_0 u} \tilde{B}_{-2k}(u, u_1, u_2) + e^{-ik\omega_0 u} \tilde{B}_{2k}(u, u_1, u_2) \right] \right] du.$$

Враховуючи, що для великих θ :

$$\int_{-\theta}^{\theta} t^2 b(t, u) \cos k\omega_0 t dt \approx \frac{\theta^3}{3} B_k^c(u),$$

для дисперсії (4.3.18) отримуємо:

$$D[\hat{\omega}_2^c] = \frac{3}{k^2 \theta^3 \left[\int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_k^c(u) \cos \omega u du \right]^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[\int_{-2\theta}^{2\theta} \left[\tilde{B}_0(u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 u + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_0 u} \tilde{B}_{-2k}(u, u_1, u_2) + e^{-ik\omega_0 u} \tilde{B}_{2k}(u, u_1, u_2) \right] \right] du \right] \cos \omega u_1 \cos \omega u_2 du_1 du_2 \right]. \quad (4.3.21)$$

Внутрішній подвійний інтеграл чисельника виразу (4.3.19) приймає вигляд:

$$I_2 = \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} t s b_{\zeta}(t, s-t, u_1, u_2) \cos k\omega_0 t \cos k\omega_0 s dt ds = \\ = 2 \int_0^{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta-u} t(t+u) b_{\zeta}(t, u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 t \cos k\omega_0(t+u) dt du =$$

$$= \int_0^{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta-u} t(t+u) b_{\zeta}(t, u, u_1, u_2) [\cos k\omega_0 u + \cos k\omega_0 (2t+u)] dt du.$$

Цей вираз відрізняється від (4.3.20) тільки знаком перед другою складовою.

Тому:

$$I_2 \approx \frac{\theta^3}{3} \int_{-2\theta}^{2\theta} \left[\tilde{B}_0(u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 u + \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_0 u} \tilde{B}_{-2k}(u, u_1, u_2) + e^{-ik\omega_0 u} \tilde{B}_{2k}(u, u_1, u_2) \right] \right] du$$

Приймаючи, що для великих θ :

$$\int_{-\theta}^{\theta} t^2 b(t, u) \sin k\omega_0 t dt \approx \frac{\theta^3}{3} B_k^s(u),$$

для дисперсії (4.3.19) маємо:

$$D[\hat{\omega}_2^s] = \frac{3}{k^2 \theta^3 \left[\int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_k^s(u) \cos \omega u du \right]^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[\int_{-2\theta}^{2\theta} \left[\tilde{B}_0(u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 u + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \left[\tilde{B}_{-2k}(u, u_1, u_2) e^{ik\omega_0 u} + \tilde{B}_{2k}(u, u_1, u_2) e^{-ik\omega_0 u} \right] \right] du \right] \cos \omega u_1 \cos \omega u_2 du_1 du_2 \right]. \quad (4.3.22)$$

Виразимо дисперсії (4.3.21) і (4.3.22) в залежності від спектральних характеристик сигналу. З формули (4.2.8) випливає, що:

$$\tilde{B}_0(u, u_1, u_2) = \sum_{l \in Z} e^{-il\omega_0 u_1} \left[B_l(u) B_{-l}(u + u_2 - u_1) + B_l(u + u_1) B_{-l}(u - u_1) \right].$$

Перші складові співвідношень (4.3.21) і (4.3.22) тоді приймають вигляд:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[\int_{-2\theta}^{2\theta} \tilde{B}_0(u, u_1, u_2) \cos k\omega_0 u du \right] \cos \omega u_1 \cos \omega u_2 du_1 du_2 = \\ = \sum_{l \in Z} \int_{-2\theta}^{2\theta} \cos k\omega_0 u \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(u_1) k(u_2) \left[B_l(u) B_{-l}(u + u_2 - u_1) + B_l(u + u_1) B_{-l}(u - u_1) \right] \times \right. \\ \left. \times e^{-il\omega_0 u_1} \cos \omega u_1 \cos \omega u_2 du_1 du_2 \right] du.$$

Представимо кореляційне вікно і кореляційні компоненти інтегралами:

$$k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega) e^{i\omega u} d\omega, \quad B_l(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_l(\omega) e^{i\omega u} du. \quad (4.3.23)$$

Тоді

$$\begin{aligned}
I_3 = & \frac{1}{4} \sum_{l \in Z} \int_{-2\theta}^{2\theta} \cos k \omega_0 u \left[\iiint \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) \lambda(\omega_2) f_l(\omega_3) f_{-l}(\omega_4) \left[\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_1(\omega_1 + \omega - \omega_4 - l\omega_0)} du_1 \times \right. \right. \right. \\
& \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_2(\omega_2 + \omega_4 + \omega)} du_2 \right] + \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_1(\omega_1 - \omega_4 - \omega - l\omega_0)} du_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_2(\omega_2 + \omega_4 - \omega)} du_2 \right] + \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_2(\omega_2 + \omega_4 - \omega)} du_2 \times \right. \\
& \times \left. \left. \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_1(\omega_1 - \omega_4 + \omega - l\omega_0)} du_1 \right] + \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_1(\omega_1 - \omega_4 - \omega - l\omega_0)} du_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_2(\omega_2 + \omega_4 + \omega)} du_2 \right] \right] e^{i(\omega_3 + \omega_4)u} + \\
& + e^{iu(\omega_3 - \omega_4 - l\omega_0)} \left[\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_1(\omega_1 + \omega_4 + u)} du_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_2(\omega_2 + \omega_3 + \omega)} du_2 \right] + \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_1(\omega_1 + \omega_4 - \omega)} du_1 \right] \times \right. \\
& \times \left. \left. \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_2 + \omega_3 - \omega)u_2} du_2 \right] + \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_1(\omega_1 + \omega_4 + u)} du_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_2(\omega_2 + \omega_3 - \omega)} du_2 \right] + \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_1(\omega_1 + \omega_4 - \omega)} du_1 \right] \times \right. \\
& \times \left. \left. \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_2 + \omega_3 + \omega)u_2} du_2 \right] \right] \right] d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 \right] du.
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} du = 2\pi\delta(\omega),$$

то

$$\begin{aligned}
I_3 = & \pi^2 \sum_{l \in Z} \int_{-2\theta}^{2\theta} \cos k \omega_0 u \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_l(\omega_1) f_{-l}(\omega_2) \left[\left[\lambda(\omega_2 - \omega + l\omega_0) \lambda(\omega_2 + \omega) + \right. \right. \right. \\
& + \lambda(\omega_2 + \omega + l\omega_0) \lambda(\omega_2 - \omega) + \lambda(\omega_2 - \omega + l\omega_0) \lambda(\omega_2 - \omega) + \\
& \left. \left. \left. + \lambda(\omega_2 + \omega + l\omega_0) \lambda(\omega_2 + \omega) \right] \times \right. \right. \\
& \times e^{i(\omega_1 + \omega_2)u} + e^{i(\omega_1 - \omega_2 - l\omega_0)u} \left[\lambda(\omega_1 + \omega) \lambda(\omega_2 + \omega) + \lambda(\omega_1 - \omega) \lambda(\omega_2 - \omega) + \right. \\
& \left. \left. + \lambda(\omega_1 - \omega) \lambda(\omega_2 + \omega) + \lambda(\omega_1 + \omega) \lambda(\omega_2 - \omega) \right] \right] d\omega_1 d\omega_2 \right] du.
\end{aligned}$$

Вагову функцію будемо вважати гостровершинною, тому можемо приблизно покласти:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_l(\omega_1) f_{-l}(\omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)u} \left[\lambda(\omega_2 - \omega + l\omega_0) \lambda(\omega_2 + \omega) + \lambda(\omega_2 + \omega + l\omega_0) \times \right. \\
& \quad \left. \times \lambda(\omega_2 - \omega) + \lambda(\omega_2 - \omega + l\omega_0) \lambda(\omega_2 - \omega) + \lambda(\omega_2 + \omega + l\omega_0) \lambda(\omega_2 + \omega) \right] d\omega_1 d\omega_2 \approx \\
& \quad \approx \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_0(\omega_1) e^{i\omega_1 u} d\omega_1 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda^2(\omega_1 - \omega) + \lambda^2(\omega_1 + \omega) \right] f_0(\omega_2) d\omega_2 \approx \\
& \quad \approx f_0(\omega) B_0(u) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda^2(\omega_1 - \omega) + \lambda^2(\omega_1 + \omega) \right] e^{i\omega_1 u} d\omega_1. \tag{4.3.24}
\end{aligned}$$

Введемо функцію

$$K(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega) e^{i\omega u} d\omega. \tag{4.3.25}$$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda^2(\omega_1 - \omega) + \lambda^2(\omega_1 + \omega) \right] e^{i\omega_1 u} d\omega_1 = K(u) (e^{i\omega u} + e^{-i\omega u}),$$

а звідси для великих θ :

$$\pi^2 \int_{-2\theta}^{2\theta} K(u) B_0(u) (e^{i\omega u} + e^{-i\omega u}) \cos k\omega_0 u du \approx \pi^3 \left[f_0(\omega + k\omega_0) + f_0(\omega - k\omega_0) \right] \tag{4.3.26}$$

Після аналогічних припущень також маємо:

$$\begin{aligned}
& \pi^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-2\theta}^{2\theta} \cos k\omega_0 u \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_l(\omega_1) f_{-l}(\omega_2) \left[\lambda(\omega_1 + \omega) \lambda(\omega_2 + \omega) + \lambda(\omega_1 - \omega) \lambda(\omega_2 - \omega) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \lambda(\omega_1 - \omega) \lambda(\omega_2 + \omega) + \lambda(\omega_1 + \omega) \lambda(\omega_2 - \omega) \right] e^{i(\omega_1 - \omega_2)u} d\omega_1 d\omega_2 \right] e^{-i\omega_0 u} du \approx \\
& \quad \approx \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-2\theta}^{2\theta} \cos k\omega_0 u k^2(u) \left[f_l(\omega) f_{-l}(\omega) + f_l(-\omega) f_{-l}(-\omega) + f_l(-\omega) f_{-l}(\omega) e^{-i2\omega u} + \right. \\
& \quad \left. + f_l(\omega) f_{-l}(-\omega) e^{i2\omega u} \right] e^{-il\omega_0 u} du. \tag{4.3.27}
\end{aligned}$$

Тут враховано, що:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1 \pm \omega) e^{i\omega_1 u} d\omega_1 = k(u) e^{\mp i\omega u}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_2 \pm \omega) e^{i\omega_2 u} d\omega_2 = k(u) e^{\mp i\omega u}.$$

Для великих θ :

$$\int_{-2\theta}^{2\theta} k^2(u) \cos k\omega_0 u e^{-il\omega_0 u} du \approx \pi \left[W((k-l)\omega_0) + W((k+l)\omega_0) \right], \quad (4.3.28)$$

$$\int_{-2\theta}^{2\theta} k^2(u) e^{i2\omega u} e^{-il\omega_0 u} \cos k\omega_0 u du \approx \pi \left[W(2\omega - (k+l)\omega_0) + W(2\omega + (k-l)\omega_0) \right], \quad (4.3.29)$$

$$\int_{-2\theta}^{2\theta} k^2(u) e^{-i2\omega u} e^{-il\omega_0 u} \cos k\omega_0 u du \approx \pi \left[W(2\omega + (l-k)\omega_0) + W(2\omega + (k+l)\omega_0) \right]. \quad (4.3.30)$$

Враховуючи співвідношення (4.3.24)–(4.3.30), отримуємо

$$\begin{aligned} I_3 \approx \pi^3 & \left[f_0(\omega) \left[f_0(\omega + k\omega_0) + f_0(\omega - k\omega_0) \right] + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[f_l(\omega) f_{-l}(\omega) + f_l(-\omega) f_{-l}(-\omega) \right] \times \right. \\ & \times \left[W((k+l)\omega_0) + W((k-l)\omega_0) \right] + f_l(\omega) f_{-l}(-\omega) \times \\ & \times \left[W(2\omega + (k+l)\omega_0) + W(2\omega + (k-l)\omega_0) \right] + \\ & \left. + f_l(-\omega) f_{-l}(\omega) \left[W(2\omega + (l-k)\omega_0) + W(2\omega + (l+k)\omega_0) \right] \right]. \quad (4.3.31) \end{aligned}$$

Розглянемо тепер величину:

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int k(u_1) k(u_2) \left[\int_{-2\theta}^{2\theta} \tilde{B}_{2k}(u, u_1, u_2) e^{-ik\omega_0 u} du \right] \cos \omega u_1 \cos \omega u_2 du_1 du_2.$$

Використавши представлення (4.2.8) і (4.3.23), знаходимо:

$$\begin{aligned} I_4 = \frac{\pi^2}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-2\theta}^{2\theta} e^{-ik\omega_0 u} & \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int f_{l+2k}(\omega_1) f_{-l}(\omega_2) \left[e^{i(\omega_1+\omega_2)u} \left[\lambda(\omega_2 + l\omega_0 - \omega) \times \right. \right. \right. \\ & \times \lambda(\omega_2 + \omega) + \lambda(\omega_2 - \omega) \lambda(\omega_2 + l\omega_0 - \omega) + \lambda(\omega_2 + \omega) \lambda(\omega_2 + l\omega_0 + \omega) + \lambda(\omega_2 - \omega) \times \\ & \times \lambda(\omega_2 - \omega + l\omega_0) \left. \right] + e^{i(\omega_1-\omega_2)u} \left[\lambda(\omega_1 + \omega) \lambda(\omega_2 + \omega) + \lambda(\omega_1 - \omega) \lambda(\omega_2 - \omega) + \right. \\ & \left. \left. + \lambda(\omega_1 + \omega) \lambda(\omega_2 - \omega) + \lambda(\omega_1 - \omega) \lambda(\omega_2 + \omega) \right] e^{-il\omega_0 u} \right] d\omega_1 d\omega_2 \right] du. \end{aligned}$$

У припущенні, що спектральні компоненти мало змінюються на ширині спектрального вікна, маємо:

$$I_4 \approx \frac{\pi^2}{2} \int_{-2\theta}^{2\theta} e^{-ik\omega_0 u} \left[B_{2k}(u) \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\omega_1) \left[\lambda^2(\omega_1 + \omega) + \lambda^2(\omega_1 - \omega) \right] e^{i\omega_1 u} d\omega_1 + \right.$$

$$+ \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-il\omega_0 u} \left[f_{l+2k}(-\omega) f_{-l}(-\omega) + f_{l+2k}(\omega) f_{-l}(\omega) + e^{-i2\omega u} f_{l+2k}(-\omega) f_{-l}(\omega) + e^{i2\omega u} \times \right. \\ \left. \times f_{l+2k}(\omega) f_{-l}(-\omega) \right] k^2(u) du.$$

Оскільки

$$\int_{-2\theta}^{2\theta} e^{-i(k+l)\omega_0 u} k^2(u) du \approx 2\pi W[(k+l)\omega_0], \\ \int_{-2\theta}^{2\theta} e^{-i[(k+l)\omega_0 \pm 2\omega]u} k^2(u) du = 2\pi W[((k+l)\omega_0) \pm 2\omega],$$

тоді, враховуючи співвідношення (4.3.26) і (4.327), приходимо до виразу:

$$I_4 = \pi^3 \left[f_0(\omega) \left[f_{2k}(-\omega + k\omega_0) + f_{2k}(\omega + k\omega_0) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[W((k+l)\omega_0) \left[f_{l+2k}(-\omega) f_{-l}(\omega) + f_{l+2k}(\omega) f_{-l}(\omega) \right] + f_{l+2k}(-\omega) f_{-l}(\omega) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times W[(k+l)\omega_0 + 2\omega] + f_{l+2k}(\omega) f_{-l}(\omega) W[(k+l)\omega_0 - 2\omega] \right] \right]. \quad (4.3.32)$$

Прийmemo, що:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_k^c(u) \cos \omega u du \approx 2\pi \left[\operatorname{Re} f_k(\omega) + \operatorname{Re} f_k(-\omega) \right].$$

Тоді на основі (4.3.31) і (4.3.32) отримуємо наступну формулу для дисперсії у випадку, коли період оцінюється за статистикою (4.2.1):

$$D[\hat{\omega}_2^c] = \frac{3\pi}{4k^2\theta^3 \left[\operatorname{Im} f_k(\omega) + \operatorname{Im} f_k(-\omega) \right]^2} \left[2f_0(\omega) \left[f_0(\omega + k\omega_0) + f_0(\omega - k\omega_0) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[\left[f_l(\omega) f_{-l}(\omega) + f_l(-\omega) f_{-l}(-\omega) \right] \left[W((k+l)\omega_0) + W((k-l)\omega_0) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + f_l(-\omega) f_{-l}(\omega) \left[W(2\omega + (l+k)\omega_0) + W(2\omega + (l-k)\omega_0) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + f_l(\omega) f_{-l}(-\omega) \left[W(2\omega + (k+l)\omega_0) + W(2\omega + (k-l)\omega_0) \right] \right] + \right. \\ \left. + 2\operatorname{Re} \left\{ f_0(\omega) \left[f_{2k}(\omega + k\omega_0) + f_{2k}(-\omega + k\omega_0) \right] + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[W((k+l)\omega_0) \left[f_{l+2k}(-\omega) f_{-l}(-\omega) + f_{l+2k}(\omega) f_{-l}(\omega) \right] + f_{l+2k}(-\omega) \times \right. \\
& \left. \times f_{-l}(\omega) W((k+l)\omega_0 + 2\omega) + f_{l+2k}(\omega) f_{-l}(-\omega) W((k+l)\omega_0 - 2\omega) \right] \Big\}. \quad (4.3.33)
\end{aligned}$$

Провівши аналогічні перетворення величини (4.3.22) і поклавши

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(u) B_k^s(u) \cos \omega u du \approx 2\pi \left[\operatorname{Im} f_k(\omega) + \operatorname{Im} f_k(-\omega) \right],$$

приходимо до виразу:

$$\begin{aligned}
D[\hat{\omega}_2^s] &= \frac{3\pi}{4k^2 \theta^3 \left[\operatorname{Im} f_k(\omega) + \operatorname{Im} f_k(-\omega) \right]^2} \left[2f_0(\omega) \left[f_0(\omega + k\omega_0) + f_0(\omega - k\omega_0) \right] + \right. \\
& + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[\left[f_l(\omega) f_{-l}(\omega) + f_l(-\omega) f_{-l}(-\omega) \right] \left[W((k+l)\omega_0) + W((k-l)\omega_0) \right] + \right. \\
& + f_l(-\omega) f_{-l}(\omega) \left[W(2\omega + (k+l)\omega_0) + W(2\omega + (l-k)\omega_0) \right] + \\
& + f_l(\omega) f_{-l}(-\omega) \left[W(2\omega + (k+l)\omega_0) + W(2\omega + (l-k)\omega_0) \right] \Big] - \\
& - 2\operatorname{Re} \left\{ f_0(\omega) \left[f_{2k}(\omega + k\omega_0) + f_{2k}(-\omega + k\omega_0) \right] + \right. \\
& + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[W((k+l)\omega_0) \left[f_{l+2k}(-\omega) f_{-l}(-\omega) + f_{l+2k}(\omega) f_{-l}(\omega) \right] + f_{l+2k}(-\omega) f_{-l}(\omega) \times \right. \\
& \left. \left. \times W((k+l)\omega_0 + 2\omega) + f_{l+2k}(\omega) f_{-l}(-\omega) W((k+l)\omega_0 - 2\omega) \right] \Big\}. \quad (4.3.34)
\end{aligned}$$

З формул (4.3.33) і (4.3.34) видно, що дисперсії оцінок базової частоти ПНВС є обернено пропорційними до квадрату номера вибраної для оцінювання гармоніки, а також квадрату математичного сподівання того функціоналу за екстремальними значеннями якого знаходиться оцінка частоти. Залежність дисперсій від частоти описується спектральними компонентами ПНВС з відповідними вагами, роль яких виконують зміщені за частотою функції $W(\omega)$. Найбільші значення таких ваг припадають на ті спектральні компоненти, які вибрані для оцінювання.

4.4. Дискретні оцінки базової частоти ПНВС.

Дискретні статистики для оцінювання базової частоти сформуємо, замінивши інтегральні перетворення за часом t і зсувом u відповідними інтегральними сумами. Тоді маємо:

$$\hat{f}_k^{c,s}(\omega, \omega_2) = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n=-1}^L k(n\Delta u) \left[\frac{2}{2K+1} \sum_{m=-K}^K \overset{\circ}{\xi}(mh) \overset{\circ}{\xi}(mh+n\Delta u) \right] \times \\ \times \begin{cases} \cos k\omega_2 mh \\ \sin k\omega_2 mh \end{cases} \cos \omega n\Delta u, \quad (4.4.1)$$

де $h = \frac{\theta}{k}$, $\Delta u = \frac{u_m}{L}$. Детерміновані складові цих статистик визначаються

співвідношенням:

$$\begin{cases} C_k(\omega, \omega_2) \\ S_k(\omega, \omega_2) \end{cases} = \\ = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n=-L}^L k(n\Delta u) \left[\frac{2}{2K+1} \sum_{m=-K}^K b(mh, n\Delta u) \begin{cases} \cos k\omega_2 mh \\ \sin k\omega_2 mh \end{cases} \cos \omega n\Delta u \right]. \quad (4.4.2)$$

Представимо кореляційну функцію $b(mh, n\Delta u)$ рядом Фур'є (3.1.1). Тоді:

$$\frac{2}{2K+1} \sum_{m=-K}^K b(mh, n\Delta u) \cos k\omega_2 mh = \frac{1}{2K+1} \left[2B_0(n\Delta u) H_0(k\omega_2) + \right. \\ \left. + \sum_{r \in N} B_r^c(n\Delta u) \left[H_0(k\omega_2 + r\omega_0, K) + H_0(r\omega_0 - k\omega_2, K) \right] \right].$$

Тут позначено

$$H_0(\omega, K) = \sum_{m=-K}^K \cos \omega mh = 1 + 2 \sum_{n=1}^K \cos \omega nh$$

і враховано, що

$$\sum_{m=-K}^K \sin \omega mh = 0.$$

Використовуючи формулу для суми геометричної прогресії

$$S_k = a_0 \frac{1 - q^K}{1 - q},$$

коли $a_0 = q = e^{\pm i\omega h}$, знаходимо:

$$\begin{aligned} H_0(\omega, K) &= 1 + \sum_{n=1}^K (e^{i\omega n h} + e^{-i\omega n h}) = 1 + \frac{2 \sin \omega K \frac{h}{2} \cos(K+1)\omega \frac{h}{2}}{\sin \omega \frac{h}{2}} = \\ &= \frac{\sin \omega \left(K + \frac{1}{2}\right) h}{\sin \omega \frac{h}{2}}. \end{aligned}$$

Для синусного перетворення маємо:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2K+1} \sum_{m=-K}^K b(mh, n\Delta u) \sin k\omega_2 mh &= \frac{1}{2K+1} \sum_{r \in N} B_r^s(n\Delta u) [H_0(r\omega_0 - k\omega_2, K) - \\ &- H_0(r\omega_0 + k\omega_2, K)]. \end{aligned}$$

Якщо $\omega_2 = \omega_0$, то

$$\begin{aligned} \frac{2}{2K+1} \sum_{m=-K}^K b(mh, n\Delta u) \cos k\omega_0 mh &= \frac{1}{2K+1} [2B_0(n\Delta u)H_0(k\omega_0) + \\ &+ \sum_{r \in N} B_r^c(n\Delta u) [H_0((k+r)\omega_0, K) + H_0((r-k)\omega_0, K)]], \\ \frac{2}{2K+1} \sum_{m=-K}^K b(mh, n\Delta u) \sin k\omega_0 mh &= \frac{1}{2K+1} \sum_{r \in Z} B_r^s(n\Delta u) [H_0((k+r)\omega_0, K) + \\ &+ H_0((r-k)\omega_0, K)]. \end{aligned}$$

При $T = (M+1)h$ функції $(2K+1)^{-1} H((r \pm k)\omega_0, K)$ при $r \pm k = q(M+1)$, $q \in Z$, приймають одиничні значення. Якщо $r \pm k \neq q(M+1)$, то в асимптотиці $K \rightarrow \infty$ ці функції прямують до нуля. Тому для великих K :

$$C_k(\omega, \omega_0) = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{q \in Z} \sum_{n=-L}^L k(n\Delta u) B_{k+q(M+1)}^c(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u,$$

$$S_k(\omega, \omega_0) = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{q \in Z} \sum_{n=-L}^L k(n\Delta u) B_{k+q(M+1)}^s(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u.$$

Як видно з цих співвідношень, на значення кореляційних компонентів вибраних номерів накладаються значення тих, номери яких відрізняються від них на величини $q(M+1)$, $q \in Z$. Таке явище накладання є небажаним, оскільки значення компонентів можуть мати різні знаки. Накладання можна уникнути, якщо число компонентів N_2 є скінченим і виконується умова $|k \pm (M+1)| \geq N_2 + 1 \quad \forall k \in [-N_2, N_2]$, тобто $M \geq 2N_2$. У цьому випадку в асимптотиці маємо:

$$C_k(\omega, \omega_0) \approx \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n \in Z} k(n\Delta u) B_k^c(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u,$$

$$S_k(\omega, \omega_0) \approx \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n \in Z} k(n\Delta u) B_k^s(n\Delta u) \sin \omega n \Delta u.$$

Підставимо до цих виразів представлення

$$B_k^c(n\Delta u) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} f_k(\omega_2) \cos \omega_2 n \Delta u - \operatorname{Im} f_k(\omega) \sin \omega_2 n \Delta u] d\omega_2,$$

$$B_k^s(n\Delta u) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Im} f_k(\omega_2) \cos \omega_2 n \Delta u - \operatorname{Re} f_k(\omega) \sin \omega_2 n \Delta u] d\omega_2,$$

$$k(n\Delta u) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) e^{i\omega_1 n \Delta u} d\omega_1.$$

Перший з них приймає вигляд:

$$\begin{aligned} C_k(\omega, \omega_0) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) \operatorname{Re} f_k(\omega_2) \left[\frac{\Delta u}{4\pi} \sum_{n \in Z} \left[e^{i(\omega_1 + \omega + \omega_2)n\Delta u} + e^{i(\omega_1 - \omega - \omega_2)n\Delta u} + \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{i(\omega_1 + \omega - \omega_2)n\Delta u} + e^{i(\omega_1 - \omega + \omega_2)n\Delta u} \right] - i\lambda(\omega_1) \operatorname{Im} f_k(\omega_2) \left[\frac{\Delta u}{4\pi} \sum_{n \in Z} \left[e^{i(\omega_1 - \omega_2 + \omega)n\Delta u} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - e^{i(\omega_1 - \omega - \omega_2)n\Delta u} + e^{i(\omega_1 + \omega - \omega_2)n\Delta u} - e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega)n\Delta u} \right] \right] \right] d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned}$$

Враховуючи формулу Пуассона

$$\frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n \in Z} e^{i(\omega_1 + \omega_2 + \omega)n\Delta u} = \sum_{n \in Z} \delta \left(\omega_1 + \omega_2 + \omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right), \quad (4.4.3)$$

отримуємо:

$$C_k(\omega, \omega_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda \left(\omega_1 + \omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) + \lambda \left(\omega_1 - \omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \right] \operatorname{Re} f_k(\omega_1) d\omega_1.$$

Аналогічно:

$$S_k(\omega, \omega_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda \left(\omega_1 + \omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) + \lambda \left(\omega_1 - \omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \right] \operatorname{Im} f_k(\omega_1) d\omega_1.$$

Відтак, дискретизація за зсувом також в загальному випадку приводить до накладання і на значення спектральних компонентів на даній частоті накладаються ті значення, які зсунуті відносно неї на частоти $n \frac{2\pi}{\Delta u}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Інтервал дискретизації за зсувом потрібно вибирати так, щоб останні значення були малими. Якщо ненульові значення спектральних компонентів зосереджені в смузі $[-\omega_m, \omega_m]$, то накладання буде відсутнє, якщо $\frac{2\pi}{\Delta u} > 2\omega_m$, тобто при

$\Delta u < \frac{\pi}{\omega_m}$. В цьому випадку при великих k детерміновані складові статистик

(4.4.1), а саме (4.4.2) можуть бути представлені граничними рівностями:

$$C_k(\omega, \omega_0) = \operatorname{Re} f_k(\omega) + \operatorname{Re} f_k(-\omega),$$

$$S_k(\omega, \omega_0) = \operatorname{Im} f_k(\omega) + \operatorname{Im} f_k(-\omega).$$

Проаналізуємо тепер флуктуаційні складові:

$$N_k^c(\omega, \omega_2) = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) \left[\frac{2}{2K+1} \sum_{m=-K}^K \zeta^\circ(mh, n\Delta u) \cos k\omega_2 mh \right] \cos \omega n\Delta u,$$

$$N_k^s(\omega, \omega_2) = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) \left[\frac{2}{2K+1} \sum_{m=-K}^K \zeta^\circ(mh, n\Delta u) \sin k\omega_2 mh \right] \cos \omega n\Delta u. \quad (4.4.4)$$

Їх середньоквадратичні значення визначаються виразами:

$$E \left[N_k^c(\omega, \omega_2) \right]^2 = \left(\frac{\Delta u}{2\pi} \right)^2 \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} k(n_1\Delta u) k(n_2\Delta u) \left[\frac{4}{(2K+1)^2} \times \right.$$

$$\times \sum_{m_1, m_2 = -K}^K b_\zeta(m_1 h, (m_2 - m_1) h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \cos k \omega_2 m_1 h \cos k \omega_2 m_2 h \left] \cos \omega n_1 \Delta u \cos \omega n_2 \Delta u ,$$

$$E[N_k^s(\omega, \omega_2)]^2 = \left(\frac{\Delta u}{2\pi}\right)^2 \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} k(n_1 \Delta u) k(n_2 \Delta u) \left[\frac{4}{(2K+1)^2} \sum_{m_1, m_2 = -K}^K b_\zeta(m_1 h, (m_2 - m_1) h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \sin k \omega_2 m_1 h \sin k \omega_2 m_2 h \right] \cos \omega n_1 \Delta u \cos \omega n_2 \Delta u . \quad (4.4.5)$$

Спростимо спочатку внутрішні подвійні суми. Змінюємо порядок сумування та вводимо новий індекс (Рис. 4.4.1):

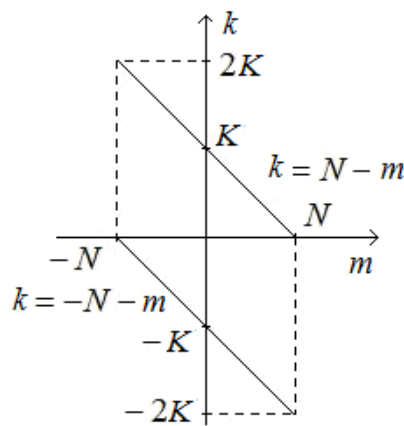


Рис. 4.4.1 – Ілюстрація нового порядку сумування

$$I_1 = \frac{4}{(2K+1)^2} \sum_{m_1, m_2 = -K}^K b_\zeta(m_1 h, (m_2 - m_1) h, n_1 \Delta u, n_1 \Delta u) \times$$

$$\times \cos k \omega_2 m_1 h \cos k \omega_2 m_2 h = \frac{4}{(2K+1)^2} \sum_{m_1 = -K}^K \cos k \omega_2 m_1 h \times$$

$$\times \sum_{m = -K - m_1}^{K - m_1} b_\zeta(m_1 h, m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \cos k \omega_2 (m + m_1) h =$$

$$= \frac{4}{(2K+1)^2} \left[\sum_{m = -2K}^0 \sum_{m_1 = -K - m}^K b_\zeta(m_1 h, m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \cos k \omega_2 m_1 h \times \right.$$

$$\left. \times \cos k \omega_2 (m + m_1) h + \sum_{m = 1}^{2K} \sum_{m_1 = -K}^{K - m} b_\zeta(m_1 h, m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \cos k \omega_2 (m + m_1) h \right] .$$

Представимо кореляційну функцію $b_\zeta(m_1 h, m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u)$ рядом Фур'є

$$b_\zeta(m_1 h, m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) = \sum_{p \in Z} \tilde{B}_p(m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) e^{ip \frac{2\pi}{M+1} m_1},$$

покладемо $\omega_2 = \omega_0$ і позначимо:

$$f_p(-K-m, K) = \frac{1}{2K+1} \sum_{m_1=-K-m}^K e^{ip \frac{2\pi}{M+1} m_1}, \quad f_p(-K, K-m) = \frac{1}{2K+1} \sum_{m_1=-K}^{K-m} e^{ip \frac{2\pi}{M+1} m_1}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{2}{2K+1} \sum_{p \in Z} \left[\sum_{m=-2K}^0 \tilde{B}_p(m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \left[\cos k \frac{2\pi}{M+1} m f_p(-K-m, K) + \frac{1}{2} e^{ik \frac{2\pi}{M+1} m} \times \right. \right. \\ & \times f_{p+2K}(-K-m, K) + \frac{1}{2} e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} m} f_{p-2K}(-K-m, K) + \sum_{m=1}^{K-1} \tilde{B}_p(m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \times \\ & \times \left[\cos k \frac{2\pi}{M+1} m f_p(-K, K-m) + \frac{1}{2} e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} m} f_{p+2K}(-K, K-m) + \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{1}{2} e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} m} f_{p+2K}(-K, K-m) \right] \right] \right]. \end{aligned}$$

Залишимо в цьому виразі тільки ті складові, які визначаються індексами $p = q(M+1)$ і $p \pm 2k = q(M+1)$, $q \in Z$. Оскільки для таких індексів

$$f_{\pm 2k+q(M+1)}(-K-m, K) = 1 + \frac{m}{2K+1}, \quad f_{\pm 2k+q(M+1)}(-K, K-m) = 1 - \frac{m}{2K+1},$$

то

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{2}{2K+1} \sum_{q \in Z} \sum_{m=-2K}^{2K} \left(1 - \frac{|m|}{2K+1} \right) \left[\tilde{B}_{q(M+1)}(m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \cos k \frac{2\pi}{M+1} m + \frac{1}{2} e^{ik \frac{2\pi}{M+1} m} \times \right. \\ & \left. \times \tilde{B}_{-2k+q(M+1)}(m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) + e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} m} \tilde{B}_{2k+q(M+1)}(m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \right]. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Після аналогічних перетворень для внутрішньої подвійної суми середньоквадратичної складової (4.51) статистики (4.50) знаходимо:

$$I_2 = \frac{2}{2K+1} \sum_{q \in Z} \sum_{m=-2K}^{2K} \left(1 - \frac{|m|}{2K+1}\right) \left[\tilde{B}_{q(M+1)}(mh, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \cos k \frac{2\pi}{M+1} m - \frac{1}{2} e^{ik \frac{2\pi}{M+1} m} \tilde{B}_{-2k+q(M+1)}(mh, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) - e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} m} \tilde{B}_{2k+q(M+1)}(mh, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \right]. \quad (4.4.7)$$

Зі співвідношень (4.4.6) і (4.4.7) випливає, що при виконанні умови (4.2.9) $I_1 \rightarrow 0$ і $I_2 \rightarrow 0$, а значить і $E[N_k^{c,s}(\omega, \omega_0)]^2 \rightarrow 0$, якщо $K \rightarrow \infty$. Швидкість збіжності залежить не лише від нульового кореляційного компоненту $\zeta(t, u_1, u_2)$ і його кореляційних компонентів з номерами $2k$, а й тих, номери яких відрізняються від них на величину $q(M+1)$. Складові, які визначаються останніми номерами, мають порядок малості такий самий як і основні. Тобто наявне накладання може значно погіршити швидкість збіжності, тому крок дискретизації h потрібно вибирати так, щоб величини компонентів, які накладаються, були якнайменшими [211-213]. Накладання можна уникнути взагалі тільки при скінченному числі N_2 кореляційних компонентів. Число кореляційних компонентів випадкового процесу $\zeta(t, u_1, u_2)$ тоді дорівнює $2N_2$. Умова відсутності накладання $|2k \pm (M+1)| \geq 2N_2$ буде виконуватися $\forall k \in [-N_2, N_2]$ при $M \geq 4N_2$. У виразах (4.4.6) і (4.4.7) в цьому випадку будуть присутні тільки ті складові, для яких $q = 0$:

$$I_1 = \frac{2}{2K+1} \sum_{m=-2K}^{2K} \left(1 - \frac{|m|}{2K+1}\right) \left[\tilde{B}_0(mh_1, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \cos k \frac{2\pi}{M+1} m + \frac{1}{2} e^{ik \frac{2\pi}{M+1} m} \times \right. \\ \left. \times \tilde{B}_{-2k}(mh_1, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) + e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} m} \tilde{B}_{2k}(mh_1, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \right], \\ I_2 = \frac{2}{2K+1} \sum_{m=-2K}^{2K} \left(1 - \frac{|m|}{2K+1}\right) \left[\tilde{B}_0(mh_1, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \cos k \frac{2\pi}{M+1} m - \frac{1}{2} e^{ik \frac{2\pi}{M+1} m} \times \right. \\ \left. \times \tilde{B}_{-2k}(mh_1, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) - e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} m} \tilde{B}_{2k}(mh_1, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \right].$$

Число вибірки K слід вибирати так, щоб ці величини були досить малими. Тоді флуктуаційні складові статистик (4.4.1) незначно зміщуватимуть точки екстремумів їх детермінованих складових і для аналізу властивостей оцінок частоти тоді можемо використати метод малого параметра, представивши їх у вигляді (4.3.3) і (4.3.4).

Аналіз проведемо в першому наближенні, тобто на основі співвідношень (4.3.3), (4.3.4) і (4.3.7) залишивши ті самі позначення і пам'ятаючи про те, що детерміновані і флуктуаційні складові тепер визначаються формулами (4.4.2) і (4.4.4).

Для похідних детермінованих складових отримуємо:

$$\begin{aligned}\frac{dC_k(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} &= -\frac{\Delta u(kh)}{2\pi} \sum_{n \in Z} k(n\Delta u) \left[\frac{2rh}{2K+1} \sum_{m=-K}^K mb(mh, n\Delta u) \sin k\omega_2 mh \right] \cos \omega n\Delta u, \\ \frac{dS_k(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} &= \frac{\Delta u(kh)}{2\pi} \sum_{n \in Z} k(n\Delta u) \left[\frac{2}{2K+1} \sum_{m=-K}^K mb(mh, n\Delta u) \cos k\omega_2 mh \right] \cos \omega n\Delta u, \\ \frac{d^2C_k(\omega, \omega_2)}{d\omega_2^2} &= -\frac{\Delta u(kh)^2}{2\pi} \sum_{n \in Z} k(n\Delta u) \left[\frac{2rh}{2K+1} \sum_{m=-K}^K m^2 b(mh, n\Delta u) \cos k\omega_2 mh \right] \cos \omega n\Delta u, \\ \frac{d^2S_k(\omega, \omega_2)}{d\omega_2^2} &= -\frac{\Delta u(kh)^2}{2\pi} \sum_{n \in Z} k(n\Delta u) \left[\frac{2}{2K+1} \sum_{m=-K}^K mb(mh, n\Delta u) \sin k\omega_2 mh \right] \cos \omega n\Delta u.\end{aligned}$$

Зміщення оцінок тоді визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\varepsilon[\hat{\omega}_2^c] &= -\frac{\sum_{n \in Z} k(n\Delta u) \left[\sum_{m=-K}^K mb(mh, n\Delta u) \sin k\omega_0 mh \right] \cos \omega n\Delta u}{kh \sum_{n \in Z} k(n\Delta u) \left[\sum_{m=-K}^K m^2 b(mh, n\Delta u) \cos k\omega_0 mh \right] \cos \omega n\Delta u}, \\ \varepsilon[\hat{\omega}_2^s] &= -\frac{\sum_{n \in Z} k(n\Delta u) \left[\sum_{m=-K}^K mb(mh, n\Delta u) \cos k\omega_0 mh \right] \cos \omega n\Delta u}{kh \sum_{n \in Z} k(n\Delta u) \left[\sum_{m=-K}^K m^2 b(mh, n\Delta u) \sin k\omega_0 mh \right] \cos \omega n\Delta u}.\end{aligned}$$

Підставимо сюди представлення кореляційної функції у вигляді ряду Фур'є і введемо позначення

$$H_1(\omega, K) = \sum_{m=-K}^K m \sin \omega m h, \quad H_2(\omega, K) = \sum_{m=-K}^K m^2 \cos \omega m h.$$

Зміщення після проведення сумування приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{\omega}_2^c] &= \left[2H_1(k\omega_0, K) \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_0(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \right] + \sum_{r \in \mathbb{N}} \left[\left[H_2((r+k)\omega_0, K) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + H_2((k-r)\omega_0, K) \right] \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_2^c(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \right] \right] \right] \times \\ &\quad \times \left[kh \left[2H_2(k\omega_0, K) \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_0(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{r \in \mathbb{Z}} \left[\left[H_2((r+k)\omega_0, K) + H_2((k-r)\omega_0, K) \right] \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_r^c(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \right] \right] \right] \right]^{-1}, \\ \varepsilon[\hat{\omega}_2^s] &= \left[\sum_{r \in \mathbb{N}} \left[\left[H_1((r+k)\omega_0, K) + H_1((r-k)\omega_0, K) \right] \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_r^s(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \right] \right] \right] \times \\ &\quad \times \left[rh \sum_{r \in \mathbb{N}} \left[\left[H_2((r-k)\omega_0, K) - H_2((r+k)\omega_0, K) \right] \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_r^s(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \right] \right] \right]^{-1} \end{aligned}$$

Перейдемо в частотну область. Легко бачити, що:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_0(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u = \frac{1}{2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1) f_0(\omega_2) \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[e^{i(\omega_1 + \omega_2 + \omega)n\Delta u} + e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega)n\Delta u} \right] \right].$$

Прийнявши до уваги формулу Пуассона (4.4.3), маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_0(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u &= \frac{\pi}{\Delta u} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda \left(\omega_1 + \omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) + \lambda \left(\omega_1 - \omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \right] \times \\ &\quad \times f_0(\omega_1) \approx \frac{\pi}{\Delta u} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[f_0 \left(\omega - n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) + f_0 \left(\omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \right]. \end{aligned}$$

Аналогічні перетворення приводять до співвідношень:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_k^c(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \approx \frac{2\pi}{\Delta u} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\begin{array}{l} \operatorname{Re} f_k \left(\omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) + \\ + \operatorname{Re} f_k \left(-\omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \end{array} \right], \quad (4.4.8)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_k^s(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \approx \frac{2\pi}{\Delta u} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\operatorname{Im} f_k \left(\omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) + \operatorname{Im} f_k \left(-\omega + n \frac{2\pi}{\Delta u} \right) \right].$$

Як бачимо, зміщення оцінки частоти може суттєво зростати з причини накладання, тому інтервал дискретизації за зсувом слід вибирати так, щоб значення частот накладання попадали в такий інтервал, де спектральні компоненти є малими за величиною. Очевидно, що цього небажаного явища можна уникнути забезпечивши умови за яких спектральні характеристики не рівні нулю тільки в смузі частот $[-\omega_m, \omega_m]$, вибираючи крок Δu згідно нерівності $\Delta u < \frac{\pi}{\omega_m}$.

Проведемо тепер аналіз дисперсій оцінок частоти, обмежуючись як і в неперервному випадку, тільки першим наближенням (4.19). У виразі для других похідних детермінованих складових статистик обмежимося врахуванням тільки тих складових, які залежать лише від функції

$$H_2(0, K) = \sum_{m=-K}^K m^2 = \frac{K}{3}(K+1)(2K+1). \quad \text{Ці складові найшвидше ростуть зі}$$

збільшенням числа вибірки K при виконанні умови $M \geq 2N_2$. Маємо:

$$\left[\frac{d^2 C_k^s(\omega, \omega_2)}{d\omega_2^2} \right]_{\omega=\omega_0} = -\frac{\Delta u (kh)^2}{2\pi} \frac{H_2(0, K)}{2K+1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_k^c(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \approx$$

$$\approx (kh)^2 \frac{H_2(0, K)}{2K+1} [\operatorname{Re} f_k(\omega) + \operatorname{Re} f_k(-\omega)],$$

$$\left[\frac{d^2 S_k^s(\omega, \omega_2)}{d\omega_2^2} \right]_{\omega=\omega_0} = -\frac{\Delta u (kh)^2}{2\pi} \frac{H_2(0, K)}{2K+1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_k^s(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \approx$$

$$\approx (kh)^2 \frac{H_2(0, K)}{2K+1} [\operatorname{Im} f_k(\omega) + \operatorname{Im} f_k(-\omega)].$$

Очевидно, що при переході в цих виразах до спектральних компонентів, ми припустили, що $\Delta u < \frac{\pi}{\omega_m}$.

Похідні флуктуаційних складових статистик (4.4.4) визначаються формулами:

$$\begin{aligned} \frac{dN_k^c(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} &= -\frac{\Delta u(kh)}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) \left[\frac{2}{2K+1} \sum_{m=-K}^K m \overset{\circ}{\zeta}(mh, n\Delta u) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin k\omega_2 mh \right] \times \cos \omega n \Delta u, \\ \frac{dN_k^s(\omega, \omega_2)}{d\omega_2} &= -\frac{\Delta u(kh)}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) \left[\frac{2}{2K+1} \sum_{m=-K}^K m \overset{\circ}{\zeta}(mh, n\Delta u) \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos k\omega_2 mh \right] \times \cos \omega n \Delta u. \end{aligned}$$

Звідси:

$$\begin{aligned} E(n_1^c)^2 &= \frac{(\Delta u)^2 (kh)^2}{4\pi^2 N_k^c(\omega, \omega_0)} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} k(n_1 \Delta u) k(n_2 \Delta u) \left[\frac{4}{(2K+1)^2} \sum_{m_1, m_2=-K}^K m_1 m_2 \times \right. \\ &\quad \left. \times b_\zeta(m_1 h, (m_2 - m_1) h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \sin k\omega_0 m_1 h \sin k\omega_0 m_2 h \right] \cos \omega n_1 \Delta u \cos \omega n_2 \Delta u, \\ E(n_1^s)^2 &= \frac{(\Delta u)^2 (kh)^2}{4\pi^2 N_k^s(\omega, \omega_0)} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} k(n_1 \Delta u) k(n_2 \Delta u) \left[\frac{4}{(2K+1)^2} \sum_{m_1, m_2=-K}^K m_1 m_2 \times \right. \\ &\quad \left. \times b_\zeta(m_1 h, (m_2 - m_1) h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \cos k\omega_0 m_1 h \cos k\omega_0 m_2 h \right] \cos \omega n_1 \Delta u \cos \omega n_2 \Delta u. \end{aligned}$$

Для дисперсій дискретних статистик (4.4.1) тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} D[\hat{\omega}_2^c] &= \frac{4}{k^2 h^2 H_2^2(0, K) \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_k^c(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \right]^2} \times \\ &\times \left[\sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} k(n_1 \Delta u) k(n_2 \Delta u) \left[\sum_{m_1, m_2=-K}^K m_1 m_2 b_\zeta(m_1 h, (m_2 - m_1) h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sin k\omega_0 m_1 h \sin k\omega_0 m_2 h \right] \cos \omega n_1 \Delta u \cos \omega n_2 \Delta u \right], \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

$$\begin{aligned}
D[\hat{\omega}_2^s] = & \frac{4}{k^2 h^2 H_2^2(0, K) \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} k(n\Delta u) B_k^c(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \right]^2} \left[\sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} k(n_1 \Delta u) k(n_2 \Delta u) \times \right. \\
& \times \left. \left[\sum_{m_1, m_2 = -K}^K m_1 m_2 b_\zeta(m_1 h, (m_2 - m_1) h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \cos k \omega_0 m_1 h \cos k \omega_0 m_2 h \right] \times \right. \\
& \left. \times \cos \omega n_1 \Delta u \cos \omega n_2 \Delta u \right]. \tag{4.4.10}
\end{aligned}$$

Розглянемо спочатку внутрішні суми чисельників обох виразів. Для першої з них (4.4.9) після введення нового індекса сумування $m = m_2 - m_1$ і зміни порядку сумування маємо:

$$\begin{aligned}
S_1 = & \sum_{m_1, m_2 = -K}^K m_1 m_2 b_\zeta(m_1 h, (m_2 - m_1) h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \sin k \omega_0 m_1 h \sin k \omega_0 m_2 h = \\
= & \sum_{m_1 = -K}^K \sum_{m = -K - m_1}^K m_1 (m + m_1) b_\zeta(m_1 h, m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \sin k \omega_0 m_1 h \sin k \omega_0 (m + m_1) h = \\
= & \sum_{m = -2K}^0 \sum_{m_1 = -K - m}^m \left[m_1 (m + m_1) b_\zeta(m_1 h, m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \sin k \omega_0 m_1 h \sin k \omega_0 (m + m_1) h \right] + \\
& + \sum_{m = 1}^{2K} \sum_{m_1 = -K}^{K - m} \left[m_1 (m + m_1) b_\zeta(m_1 h, m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \sin k \omega_0 m_1 h \sin k \omega_0 (m + m_1) h \right].
\end{aligned}$$

Після заміни $r = -m$, врахування рівності $b_\zeta(m_1 h, -r h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) = b_\zeta((m_1 - r) h, r h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u)$ та нової заміни $p = m_1 - r$ в першій складовій приходимо до сумування за невід'ємними індексами

$$\begin{aligned}
& \sum_{m = -2K}^0 \sum_{m_1 = -K - m}^m m_1 (m + m_1) b_\zeta(m_1 h, m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \sin k \omega_0 m_1 h \sin k \omega_0 (m + m_1) h = \\
& = \sum_{r = 0}^{2K} \sum_{p = -K}^{K - r} (p + r) p b_\zeta(p h, r h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \sin k \omega_0 p h \sin k \omega_0 (p + r) h.
\end{aligned}$$

У результаті приходимо до співвідношення:

$$S_1 = \sum_{m_1 = -K}^K b_\zeta(m_1 h, m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \sin k \omega_0 m_1 h \sin k \omega_0 (m + m_1) h +$$

$$+2 \sum_{m=1}^{2K} \sum_{m_1=-K}^{K-m} m_1 (m_1 + m) b_{\zeta} (m_1 h, m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \sin k \omega_0 m_1 h \sin k \omega_0 (m + m_1) h. \quad (4.4.11)$$

Підставимо до першої складової ряд Фур'є (4.2.7):

$$\begin{aligned} \sum_{m_1=-K}^K m_1^2 b_{\zeta} (m_1 h, 0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \sin^2 k \omega_0 m_1 h &= \frac{1}{2} \sum_{r \in Z} \tilde{B}_r (0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \times \\ &\times \sum_{m_1=-K}^K m_1^2 \left(e^{i r \omega_0 m_1 h} - \frac{1}{2} \left(e^{i(r-2k)\omega_0 m_1 h} + e^{i(r+2k)\omega_0 m_1 h} \right) \right). \end{aligned}$$

Врахуємо, що

$$\begin{aligned} \sum_{m_1=-K}^K m_1^2 e^{i k \omega_0 m_1 h} &= \sum_{m_1=-K}^K m_1^2 \cos k \omega_0 m_1 h = H_2(k \omega_0, K), \\ \sum_{m_1=-K}^K m_1^2 e^{i(r \pm 2k)\omega_0 m_1 h} &= \sum_{m_1=-K}^K \cos(r \pm 2k)\omega_0 m_1 h = H_2((r \pm 2k)\omega_0, K). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{m_1=-K}^K m_1^2 b_{\zeta} (m_1 h, 0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \sin^2 k \omega_0 m_1 h &= \frac{1}{2} \sum_{r \in Z} \tilde{B}_r (0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \left[H_2(k \omega_0, K) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \left[H_2((r-2k)\omega_0) + H_2((r+2k)\omega_0) \right] \right]. \end{aligned}$$

Для другої складової співвідношення (4.4.11) отримуємо:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{m=1}^{2K} \sum_{m_1=-K}^{K-m} m_1 (m_1 + m) b_{\zeta} (m_1 h, m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \sin k \omega_0 m_1 h \sin k \omega_0 (m + m_1) h &= \\ &= \sum_{r \in Z} \sum_{m=1}^{2K} \tilde{B}_r (m h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \left[\cos k \omega_0 m h L_2(-K, K-m) - \frac{1}{2} \left[e^{i k \omega_0 m h} \times \right. \right. \\ &\left. \left. \times L_{r+2k}(-K, K-m) + e^{-i k \omega_0 m h} L_{r-2k}(-K, K-m) \right] \right], \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} L_r(-K, K-m) &= L_r^{(2)}(-K, K-m) + m L_r^{(1)}(-K, K-m), \\ L_r^{(1)}(-K, K-m) &= \sum_{m_1=-K}^{K-m} m_1 e^{i r \omega_0 m_1 h}, \quad L_r^{(2)}(-K, K-m) = \sum_{m_1=-K}^{K-m} m_1^2 e^{i r \omega_0 m_1 h}. \end{aligned}$$

Сумуючи результати, отримані вище, для суми S_1 маємо:

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{r \in Z} \left[\tilde{B}_r(0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \left[H_2(k\omega_0, K) - \frac{1}{2} \left[H_2((r-2k)\omega_0) + H_2((r+2k)\omega_0) \right] \right] + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{K-1} \tilde{B}_r(mh, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \left[\cos k\omega_0 mh L_2(-K, K-m) - \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_0 mh} L_{r+2k}(-K, K-m) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + e^{-ik\omega_0 mh} L_{r-2k}(-K, K-m) \right] \right] \right].$$

В асимптотиці залишимо тільки ті складові, які найшвидше ростуть зі збільшенням K , а саме ті, які залежать від кореляційних компонентів з номерами $r = q(\mu + 1)$ і $r = k + q(\mu + 1)$, $q \in Z$:

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{q \in Z} \left[\left[\tilde{B}_{q(M+1)}(0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) - \frac{1}{2} \left[\tilde{B}_{-2k+q(M+1)}(0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \tilde{B}_{-2k+q(M+1)}(0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) H_2(q(M+1)\omega_0, K) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m=1}^{2K} \left[\tilde{B}_{q(M+1)}(mh, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \cos k\omega_0 mh - \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_0 mh} \tilde{B}_{-2k+q(M+1)}(mh, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + e^{-ik\omega_0 mh} \tilde{B}_{2k+q(M+1)}(mh, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \right] \right] L_{q(M+1)}(-K, K-m) \right].$$

Якщо кореляційні компоненти зазначених номерів за величиною не є малими в порівнянні з нульовим і тими, які мають номери $2k$, то накладання, як видно, може суттєво змінити дисперсію оцінки. Тому його доцільно уникати, вибираючи відповідний крок дискретизації. При скінченному числі гармонічних складових кореляційної функції ПНВС умовою відсутності накладання буде виконання нерівності $M > 4N_2$. Якщо покласти $L_0(-K, K-m) \approx H_2(0, K)$, то в цьому випадку

$$S_1 \approx \frac{1}{2} \left[\tilde{B}_0(0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) - \frac{1}{2} \left[\tilde{B}_{-2k}(0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) + \tilde{B}_{2k}(0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{K-1} \left[\tilde{B}_0(0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \cos k\omega_0 mh - \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_0 mh} \tilde{B}_{-2k}(0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + e^{-ik\omega_0 mh} \tilde{B}_{2k}(0, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \right] \right]$$

$$+e^{-ik\omega_0mh} \tilde{B}_{2k}(0, n_1\Delta u, n_2\Delta u) \Big] \Big] H_2(0, K).$$

Прийнявши до уваги, що:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0(-mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u) &= \tilde{B}_0(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u), \\ \tilde{B}_{2k}(-mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u) &= e^{-i2k\omega_0mh} \tilde{B}_{2k}(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u), \end{aligned}$$

цю величину представимо у вигляді симетричної суми:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \sum_{m=-K+1}^{K-1} \left[\tilde{B}_0(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u) \cos k\omega_0mh - \frac{1}{2} \left[e^{ik\omega_0mh} \tilde{B}_{-2k}(0, n_1\Delta u, n_2\Delta u) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{B}_{2k}(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u) e^{-ik\omega_0mh} \right] \right]. \end{aligned}$$

Аналогічні перетворення подвійної внутрішньої суми чисельника виразу (4.4.9) дають

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{m_1, m_2=-K}^K m_1 m_2 b_\zeta(m_1 h, (m_2 - m_1) h, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) \cos k\omega_0 m_1 h \cos k\omega_0 m_2 h = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=-K+1}^{K-1} \left[\tilde{B}_0(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u) \cos k\omega_0mh + \frac{1}{2} \left[\tilde{B}_{-2k}(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u) e^{ik\omega_0mh} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{B}_{2k}(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u) e^{-ik\omega_0mh} \right] \right]. \end{aligned}$$

Дисперсії оцінок частоти тоді приймають вигляд:

$$\begin{aligned} D[\hat{\omega}_2^c] &= \frac{4}{k^2 h^2 H_2(0, K) \left[\sum_{n \in Z} k(n\Delta u) B_k^c(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \right]^2} \left[\sum_{n_1, n_2 \in Z} k(n_1\Delta u) k(n_2\Delta u) \times \right. \\ &\quad \times \sum_{m=-K+1}^{K-1} \left[2\tilde{B}_0(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u) \cos k\omega_0mh - \left[\tilde{B}_{-2k}(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u) e^{-ik\omega_0mh} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{B}_{2k}(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u) e^{ik\omega_0mh} \right] \right] \cos \omega n_1 \Delta u \cos \omega n_2 \Delta u \Big], \quad (4.4.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[\hat{\omega}_2^s] &= \frac{4}{k^2 h^2 H_2(0, K) \left[\sum_{n \in Z} k(n\Delta u) B_k^c(n\Delta u) \cos \omega n \Delta u \right]^2} \left[\sum_{n_1, n_2 \in Z} k(n_1\Delta u) k(n_2\Delta u) \times \right. \\ &\quad \times \sum_{m=-K+1}^{K-1} \left[2\tilde{B}_0(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u) \cos k\omega_0mh + \left[\tilde{B}_{2k}(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u) e^{-ik\omega_0mh} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+\tilde{B}_{-2k}(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u)e^{ik\omega_0mh} \Big] \cos \omega n_1\Delta u \cos \omega n_2\Delta u \Big]. \quad (4.4.13)$$

Перейдемо в частотну область. Враховуючи формулу (4.2.8) і спектральні представлення кореляційного вікна і кореляційних компонентів (4.3.23), а також формулу Пуассона (4.4.3), знаходимо:

$$\begin{aligned} S_3 = & 2 \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} k(n_1\Delta u)k(n_2\Delta u) \left[\sum_{m=-K+1}^{K-1} \tilde{B}_0(mh, n_1\Delta u, n_2\Delta u) \cos k\omega_0mh \right] \times \\ & \times \cos \omega n_1\Delta u \cos \omega n_2\Delta u = \frac{2\pi^2}{\Delta u^2} \sum_{m=-K+1}^{K-1} \cos k\omega_0mh \times \\ & \times \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_l(\omega_1) f_{-l}(\omega_2) \left[\left[\lambda\left(\omega_2 - \omega + l\omega_0 - n_1 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \lambda\left(\omega + \omega_2 + n_2 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) + \right. \right. \\ & + \lambda\left(\omega_2 + \omega + l\omega_0 - n_1 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \lambda\left(\omega_2 - \omega - n_2 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) + \lambda\left(\omega_2 - \omega + n_1 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \times \\ & \times \lambda\left(\omega_2 + l\omega_0 - \omega + n_1 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) + \lambda\left(\omega_2 + \omega + l\omega_0 - n_1 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \lambda\left(\omega_2 + \omega + n_2 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \Big] e^{im(\omega_1 + \omega_2)h} + \\ & + \left[\lambda\left(\omega + \omega_2 + n_1 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \lambda\left(\omega_1 + \omega + n_2 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) + \lambda\left(\omega - \omega_2 + n_1 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \lambda\left(\omega_2 - \omega + n_2 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) + \right. \\ & + \lambda\left(\omega_2 + \omega + n_1 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \lambda\left(\omega_1 - \omega + n_2 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) + \\ & \left. + \lambda\left(\omega_2 - \omega + n_1 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \lambda\left(\omega_1 + \omega + n_2 \frac{2\pi}{\Delta u}\right) \right] e^{i(\omega_1 - \omega_2 - l\omega_0)mh} \Big] d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned}$$

Як бачимо складова S_3 суттєво може збільшитися через накладання в частотній області, яке зумовлене дискретизацією за зсувом u . Таке накладання відсутнє,

якщо $\Delta u < \frac{\pi}{\omega_m}$.

Тоді

$$\begin{aligned} S_3 = & \frac{2\pi^2}{\Delta u^2} \sum_{m=-K+1}^{K-1} \cos k\omega_0mh \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_l(\omega_1) f_{-l}(\omega_2) \left[\left[\lambda(\omega_2 - \omega + l\omega_0) \lambda(\omega_2 + \omega) + \right. \right. \\ & + \lambda(\omega_2 - \omega) \lambda(\omega_2 + \omega + l\omega_0) + \lambda(\omega_2 - \omega) \lambda(\omega_2 - \omega + l\omega_0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\lambda(\omega_2 + \omega)\lambda(\omega_2 + \omega + l\omega_0)]e^{im(\omega_1 + \omega_2)h} + [\lambda(\omega_2 + \omega)\lambda(\omega_1 + \omega) + \\
& +\lambda(\omega - \omega_2)\lambda(\omega - \omega_1) + \lambda(\omega_2 + \omega)\lambda(\omega_1 - \omega) + \lambda(\omega_2 - \omega)\lambda(\omega_1 + \omega)] \times \\
& \times e^{i(\omega_1 - \omega_2 - l\omega_0)mh}]d\omega_1 d\omega_2.
\end{aligned}$$

Якщо вважати спектральну вагову функцію гостровершинною, то можна приблизно прийняти:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l \in Z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_l(\omega_1) f_{-l}(\omega_2) e^{im(\omega_1 + \omega_2)h} [\lambda(\omega_2 - \omega + l\omega_0)\lambda(\omega_2 + \omega) + \\
& +\lambda(\omega_2 - \omega)\lambda(\omega_2 + \omega + l\omega_0) + \lambda(\omega_2 - \omega) \times \\
& \times \lambda(\omega_2 - \omega + l\omega_0) + \lambda(\omega_2 + \omega)\lambda(\omega_2 + \omega + l\omega_0)] d\omega_1 d\omega_2 \approx \\
& \approx f_0(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_0(\omega_1) e^{i\omega_1 mh} d\omega_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} [\lambda^2(\omega_2 - \omega) + \lambda^2(\omega_2 + \omega)] e^{i\omega_2 mh} d\omega_2 \right].
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(\omega_1) e^{i\omega_1 mh} d\omega_1 \approx B_0(mh),$$

а також

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\lambda^2(\omega_1 - \omega) + \lambda^2(\omega_1 + \omega)] e^{i\omega_1 mh} = K(mh)(e^{iomh} + e^{-iomh}), \quad (4.4.14)$$

де

$$K(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\omega) e^{i\omega u} d\omega, \quad (4.4.15)$$

то для великих K маємо:

$$\begin{aligned}
& \frac{2\pi^2}{\Delta u^2} \sum_{m=-K+1}^{K-1} \cos k\omega_0 mh K(mh) B_0(mh) (e^{iomh} + e^{-iomh}) \approx \\
& \approx \frac{4\pi^3}{\Delta u^3} [f_0(\omega + k\omega_0) + f_0(\omega - k\omega_0)],
\end{aligned}$$

при цьому $h = \Delta u$ і $\Delta u < \frac{\pi}{\omega_m}$.

Прийнявши до уваги, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1 \pm \omega) e^{i\omega_1 m h} d\omega_1 = K(mh) e^{\mp i\omega m h}, \quad (4.4.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega_1 \pm \omega) e^{-i\omega_1 m h} d\omega_1 = K(mh) e^{\pm i\omega m h}, \quad (4.4.17)$$

після аналогічних припущень отримуємо наближення:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_l(\omega_1) f_{-l}(\omega_2) [\lambda(\omega_2 + \omega) \lambda(\omega_1 + \omega) + \lambda(\omega - \omega_2) \lambda(\omega - \omega_1) + \\ & + \lambda(\omega_2 + \omega) \lambda(\omega_1 - \omega) + \lambda(\omega_2 - \omega) \lambda(\omega_1 + \omega)] e^{i(\omega_1 - \omega_2 - l\omega_0) m h} d\omega_1 d\omega_2 \approx \\ & \approx K^2(mh) e^{-il\omega_0 m h} [f_l(-\omega) f_{-l}(-\omega) + f_l(\omega) f_{-l}(\omega) + f_l(\omega) f_{-l}(-\omega) e^{i2\omega m h} + \\ & + f_l(-\omega) f_{-l}(\omega) e^{-i2\omega m h}]. \end{aligned}$$

Покладемо також

$$\sum_{m=-K+1}^{K-1} K^2(mh) \cos k\omega_0 m h e^{-il\omega_0 m h} \approx \frac{\pi}{h} [W((k+l)\omega_0) + W((k-l)\omega_0)], \quad (4.4.18)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-K+1}^{K-1} K^2(mh) \cos k\omega_0 m h e^{-i(l\omega_0 \pm 2\omega) m h} \approx \frac{\pi}{h} [W(2\omega + (k+l)\omega_0) + \\ & + W(2\omega \pm (k-l)\omega_0)], \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

і будемо вважати $h = \Delta u$. Величина S_3 тоді приймає вигляд:

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{2\pi^3}{\Delta u^3} [2f_0(\omega) [f_0(\omega + k\omega_0) + f_0(\omega - k\omega_0)] + \\ & + \sum_{l \in \mathbb{Z}} [[f_l(\omega) f_{-l}(\omega) + f_l(-\omega) f_{-l}(-\omega)] [W((k+l)\omega_0) + W((k-l)\omega_0)] + \\ & + f_l(\omega) f_{-l}(-\omega) [W(2\omega + (k-l)\omega_0) + W(2\omega + (k+l)\omega_0)] + \\ & + f_l(-\omega) f_{-l}(\omega) [W(2\omega + (l-k)\omega_0) + W(2\omega + (k+l)\omega_0)]]]. \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

Знайдемо тепер представлення в частотній області величини

$$S_4 = \sum_{n_1, n_2 \in Z} k(n_1 \Delta u) k(n_2 \Delta u) \left[\sum_{m=-K+1}^{K-1} \tilde{B}_{2K}(mh, n_1 \Delta u, n_2 \Delta u) e^{-ik\omega_0 mh} \right] \times \\ \times \cos \omega n_1 \Delta u \cos \omega n_2 \Delta u].$$

Третя складова чисельника дисперсії (4.4.12) є спряженою до неї. Використовуючи співвідношення (4.2.8), представлення (4.3.23) і формулу

Пуассона (4.4.3) за умови $\Delta u < \frac{\pi}{\omega_m}$ знаходимо:

$$S_4 = \frac{\pi^2}{\Delta u^2} \sum_{m=-K+1}^{K-1} e^{ik\omega_0 h} \sum_{l \in Z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_{l-2r}(\omega_1) f_{-l}(\omega_2) \left[\lambda(\omega_2 - \omega + l\omega_0) \lambda(\omega_2 + \omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda(\omega_2 + l\omega_0 + \omega) \lambda(\omega_2 - \omega) + \lambda(\omega_2 + l\omega_0 - \omega) \lambda(\omega_2 - \omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda(\omega_2 + l\omega_0 + \omega) \lambda(\omega_2 + \omega) \right] e^{im(\omega_1 + \omega_2)h} + \right. \\ \left. + e^{-il\omega_0 mh} \left[\lambda(\omega_2 + \omega) \lambda(\omega_1 + \omega) + \lambda(\omega_2 - \omega) \lambda(\omega_1 - \omega) + \lambda(\omega_2 + \omega) \lambda(\omega_1 - \omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda(\omega_2 - \omega) \lambda(\omega_1 + \omega) \right] e^{i(\omega_1 - \omega_2)mh} \right] d\omega_1 d\omega_2.$$

При малих змінах спектральних компонентів на ширині спектральної вагової функції наближено маємо:

$$\frac{\pi^2}{\Delta u^2} \sum_{l \in Z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{l-2r}(\omega_1) f_{-l}(\omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)mh} \left[\lambda(\omega_2 + l\omega_0 - \omega) \lambda(\omega_2 + \omega) + \lambda(\omega_2 + l\omega_0 + \omega) \times \right. \\ \left. \times \lambda(\omega_2 - \omega) + \lambda(\omega_2 + l\omega_0 - \omega) \lambda(\omega_2 - \omega) + \lambda(\omega_2 + l\omega_0 + \omega) \lambda(\omega_2 + \omega) \right] d\omega_1 d\omega_2 \approx \\ \approx \frac{\pi^2}{\Delta u^2} \sum_{m=-K+1}^{K-1} e^{ik\omega_0 mh} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{-2k}(\omega_1) e^{i\omega_1 mh} d\omega_1 \right] \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\omega_2) \left[\lambda^2(\omega_2 - \omega) + \lambda^2(\omega_2 + \omega) \right] \times \\ \times e^{i\omega_2 mh} d\omega_2 \approx \frac{\pi^2}{\Delta u^2} f_0(\omega) \sum_{m=-K+1}^{K-1} B_{-2k}(mh) e^{ik\omega_0 mh} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda^2(\omega_2 - \omega) + \lambda^2(\omega_2 + \omega) \right] e^{i\omega_2 mh} d\omega_2. \quad (4.4.21)$$

Врахуємо співвідношення (4.4.14) і (4.4.15). Тоді

$$\sum_{m=-K+1}^{K-1} B_{-2k}(mh) e^{ik\omega_0 mh} \int_{-\infty}^{\infty} [\lambda^2(\omega_2 - \omega) + \lambda^2(\omega_2 + \omega)] e^{i\omega_2 mh} d\omega_2 \approx \frac{\pi}{\Delta u} [f_{-2k}(-\omega - 2\omega_0) + f_{-2k}(\omega - 2\omega_0)]. \quad (4.4.22)$$

При тих самих припущеннях з врахуванням формул (4.4.16), (4.4.17) отримуємо:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{\Delta u^2} \sum_{m=-K+1}^{K-1} e^{ik\omega_0 mh} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-l\omega_0 mh} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{l-2k}(\omega_1) f_{-l}(\omega_2) [\lambda(\omega_2 + \omega)\lambda(\omega_1 + \omega) + \lambda(\omega_2 - \omega) \times \\ & \quad \times \lambda(\omega_1 - \omega) + \lambda(\omega_2 + \omega)\lambda(\omega_1 - \omega) + \lambda(\omega_2 - \omega)\lambda(\omega_1 + \omega)] e^{i(\omega_1 - \omega_2) mh} d\omega_1 d\omega_2 \approx \\ & \approx \frac{\pi^3}{\Delta u^3} \sum_{l \in \mathbb{Z}} [W((k-l)\omega_0) [f_{l-2k}(-\omega) f_{-l}(-\omega) + f_{l-2k}(\omega) f_{-l}(\omega)] + W(2\omega + (k-l)\omega_0) \times \\ & \quad \times f_{l-2k}(\omega) f_{-l}(-\omega) + W(2\omega + (l-k)\omega_0) f_{l-2k}(-\omega) f_{-l}(\omega)]. \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

На основі наближень (4.4.18), (4.4.19) приходимо до наступного виразу для величини S_4 :

$$\begin{aligned} S_4 = & \frac{\pi^3}{\Delta u^3} [f_0(\omega) [f_{-2k}(-\omega - 2\omega_0) + f_{2k}(\omega - 2\omega_0)] + \sum_{l \in \mathbb{Z}} [W((k-l)\omega_0) [f_{l-2k}(-\omega) \times \\ & \quad \times f_{-l}(-\omega) + f_{l-2k}(\omega) f_{-l}(\omega)] + W(2\omega + (k-l)\omega_0) f_{l-2k}(\omega) f_{-l}(-\omega) + \\ & \quad + W(2\omega + (k-l)\omega_0) \times f_{l-2k}(-\omega) f_{-l}(\omega)]]]. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Прийнявши до уваги співвідношення (4.4.20)–(4.4.24), а також (4.4.8), для дисперсії (4.4.9) знаходимо:

$$\begin{aligned} D[\hat{\omega}_2^c] = & \frac{3\pi}{4k^2 h^3 K(K+1)(2K+1) [\operatorname{Re} f_k(\omega) + \operatorname{Re} f_k(-\omega)]^2} \times \\ & \times [2f_0(\omega) [f_0(\omega + k\omega_0) + f_0(\omega - k\omega_0)] + \sum_{l \in \mathbb{Z}} [[f_l(\omega) f_{-l}(\omega) + f_l(-\omega) f_{-l}(-\omega)] \times \\ & \quad \times [W((k+l)\omega_0) + W((k-l)\omega_0)] + f_l(\omega) f_{-l}(-\omega) \times \\ & \quad \times [W(2\omega + (k-l)\omega_0) + W(2\omega + (k+l)\omega_0)] + f_l(-\omega) f_{-l}(-\omega) [W(2\omega + (l-k)\omega_0) + \\ & \quad + W(2\omega + (k+l)\omega_0)]]] - 2\operatorname{Re} [f_0(\omega) [f_{-2k}(-\omega - 2\omega_0) + f_{2k}(\omega - 2\omega_0)]] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[W((k-l)\omega_0) \left[f_{l-2k}(-\omega) f_{-l}(-\omega) + f_{l-2k}(\omega) f_{-l}(\omega) \right] + W(2\omega + (k-l)\omega_0) \times \right. \\
& \quad \left. \times f_{l-2k}(\omega) f_{-l}(-\omega) + W(2\omega + (l-k)\omega_0) f_{l-2k}(-\omega) f_{-l}(-\omega) \right] \Big]. \quad (4.4.25)
\end{aligned}$$

Після аналогічних перетворень формула (4.4.12) за умови $\Delta u < \frac{\pi}{\omega_m}$ маємо:

$$\begin{aligned}
D[\hat{\omega}_2^s] &= \frac{3\pi}{4k^2 h^3 K(K+1)(2K+1) [\text{Im } f_k(\omega) + \text{Im } f_k(-\omega)]^2} \times \\
& \quad \times \left[2f_0(\omega) \left[f_0(\omega + k\omega_0) + f_0(\omega - k\omega_0) \right] + \right. \\
& + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[\left[f_l(\omega) f_{-l}(\omega) + f_l(-\omega) f_{-l}(-\omega) \right] \left[W((k+l)\omega_0) + W((k-l)\omega_0) \right] + \right. \\
& \quad \left. + f_l(\omega) f_{-l}(-\omega) \left[W(2\omega + (k-l)\omega_0) + W(2\omega + (k+l)\omega_0) \right] + \right. \\
& \quad \left. + f_l(-\omega) f_{-l}(\omega) \left[W(2\omega + (l-k)\omega_0) + W(2\omega + (k+l)\omega_0) \right] \right] + \\
& \quad + 2\text{Re} \left[f_0(\omega) \left[f_{-2k}(-\omega - 2\omega_0) + f_{2k}(\omega - 2\omega_0) \right] + \right. \\
& + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[W((k-l)\omega_0) \left[f_{l-2k}(-\omega) f_{-l}(-\omega) + f_{l-2k}(\omega) f_{-l}(\omega) \right] + W(2\omega + (k-l)\omega_0) \times \right. \\
& \quad \left. \times f_{l-2k}(\omega) f_{-l}(-\omega) + W(2\omega + (l-k)\omega_0) f_{l-2k}(-\omega) f_{-l}(\omega) \right] \Big]. \quad (4.4.26)
\end{aligned}$$

Різниця між дисперсіями дискретних оцінок основної частоти ПНВС, що визначаються виведеними співвідношеннями (4.4.25) і (4.4.26) і дисперсіями неперервних оцінок (4.3.33) і (4.3.34) за умови відсутності накладання, як видно, визначається тільки тим, в якій мірі інтегральні суми, що фігурують у виразах (4.3.21) і (4.3.22), наближають відповідні інтегральні перетворення у співвідношеннях (4.3.33) і (4.3.34). Така різниця, очевидно, залежить від швидкості зникання кореляційних зв'язків [211-213]. Тому навіть при відсутності накладання доцільно проводити порівняльний аналіз статистичних характеристик оцінок, виходячи з конкретних моделей ПНВС.

4.5. Висновки до розділу 4.

У розділі 4 показано, що миттєва спектральна густина ПНВС є комплекснозначною величиною, причому частотний діапазон, в якому миттєва спектральна густина ПНВС залежна від часу, визначається косинусними перетвореннями від косинусних і синусних кореляційних компонентів. Запропоновано статистики для визначення частотного діапазону часових змін спектральної густини та оцінки частоти таких змін.

Проведено аналіз оцінок змінних складових спектральних характеристик ПНВС та досліджено умови їх збіжності, отримано вирази для їх дисперсії та зміщення, показано слушність таких оцінок.

Проведено аналіз оцінок кореляційних компонентів ПНВС, отримано вирази для дисперсії та зміщення оцінок, показано слушність таких оцінок.

Запропоновано статистики для встановлення оцінок базових частот ПНВС. Досліджено властивості похибок оцінок базової частоти ПНВС для неперервного і дискретного сигналів, доведено їх слушність. Сформульовано вимоги до кроку дискретизації та розміру вибірки сигналу для уникнення ефектів накладання спектральних складових, отримано вирази.

Показано що дисперсії оцінок базової частоти ПНВС є обернено пропорційними до квадрату номера вибраної для оцінювання гармоніки, а також квадрату математичного сподівання того функціоналу, за екстремальними значеннями якого знаходиться оцінка частоти. Залежність дисперсії оцінок від частоти описується спектральними компонентами ПНВС з відповідними ваговими функціями, найбільші значення яких припадають на ті спектральні компоненти, які вибрані для оцінювання.

РОЗДІЛ 5

**МОДЕЛЬ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО
СИГНАЛУ НА ОСНОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГІЛЬБЕРТА ТА
АНАЛІТИЧНОГО СИГНАЛУ**

Ефективність методу аналізу огинаючої в літературі стверджується результатами, отриманими при циклостационарному моделюванні вібрації [170, 176, 192]. Вважається, що так звана циклічна спектральна густина (подвійне перетворення Фур'є кореляційної функції $b_{\xi}(t, u) = E \dot{\xi}(t) \dot{\xi}(t+u)$, $\dot{\xi}(t) = \xi(t) - m_{\xi}(t)$, $m_{\xi}(t) = E \xi(t)$, де E є оператором математичного сподівання) інтегрована по всій осі частот. Легко помітити, що ці величини визначаються коефіцієнтами Фур'є дисперсії сигналу $b_{\xi}(t, 0)$, тобто значеннями коефіцієнтів Фур'є для кореляційної функції

$$b_{\xi}(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k^{(\xi)}(u) e^{ik\omega_0 t} = B_0^{(\xi)}(u) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[C_k^{(\xi)}(u) \cos k\omega_0 t + S_k^{(\xi)}(u) \sin k\omega_0 t \right], \quad (5.1.1)$$

в точці $u = 0$ в ряді (5.1) $\omega_0 = \frac{2\pi}{P}$, P є періодом, $B_k^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} \left[C_k^{(\xi)}(u) - i S_k^{(\xi)}(u) \right]$

$\forall k \neq 0$ і

$$B_k^{(\xi)}(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T b_{\xi}(t, u) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{P} \int_0^P b_{\xi}(t, u) e^{-ik\omega_0 t} dt.$$

Двовимірна циклічна спектральна густина ПНВП визначається виразом

$$f_{\xi}(\lambda, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T b_{\xi}(t, u) e^{-i\lambda t} dt \right] du = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k^{(\xi)}(\omega) \delta_{\lambda, k\omega_0},$$

де $\delta_{\lambda, k\omega_0}$ є дельта Кронекера, і

$$f_k^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^{(\xi)}(u) e^{-i\omega u} du \quad (5.1.2)$$

Отже

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(\lambda, \omega) d\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k^{(\xi)}(0) \delta_{\lambda, k\omega_0}.$$

Нульова спектральна компонента $f_0^{(\xi)}(\omega)$ визначає спектральний склад усередненої в часі потужності сигналу, а ненульові спектральні складові (5.1.2) (їх також називають циклічними спектральними кореляціями [23, 25, 165]) визначають кореляції спектральних компонент сигналу, частоти яких зміщені на величину $k\omega_0$. Кореляційні компоненти $B_k^{(\xi)}(u)$ (циклічні кореляції [23, 25, 165]) у точці $\tau = 0$

$$B_k^{(\xi)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega) d\omega$$

повністю характеризують кореляцію просторі часову. Ці величини є комплексними, отже ми можемо описати часові зміни потужності сигналу $b_{\xi}(t, 0) = E \xi^{\circ 2}(t)$ як спектр амплітуд $|B_k^{(\xi)}(0)|$ і спектр фаз $\varphi_k^{(\xi)} = \arctg(C_2^{(\xi)}(0)/S_2^{(\xi)}(0))$. Тут слід відмітити, що найпростіший шлях обчислень $B_k^{(\xi)}(0)$ на основі експериментальних даних є використання статистик виду

$$\hat{B}_k^{(\xi)}(0) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi^{\circ 2}(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

як це було запропоновано в [139, 171, 145]. Їх обчислення на основі подвійного перетворення Фур'є оцінки кореляційної функції, що також було розглянуто у [170, 186, 192], є більш складним і трудоємким для практичного застосування [185].

Формулу для моментної функції аналітичного сигналу $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ де $\eta(t)$ це перетворення Гільберта від $\xi(t)$ можна конкретизувати, якщо взяти до уваги модель сигналу. Як зазначалося вище, аналізований сигнал є чисто випадковим, тому детерміністичний аналіз огинаючої, який використовувався в ранніх роботах [167, 178, 186], є некоректним, а його результати не можна

вважати слушними. Для обґрунтування аналізу огибаючої в численних роботах [147, 167, 178] припускалося, що повторювані “удари” можна розглядати як амплітуду сигналу, яка періодично змінюється в часі, а вібраційний сигнал можна представити як добуток низькочастотного модулюючого детермінованого сигналу. і випадкових за своєю природою вимушених коливань у системі. Однак, більш детальний аналіз кореляційної структури вібрацій у пошкоджених обертових машин показав, що результат повторюваних механічних поштовхів у багатьох випадках є значно складнішим [145, 171, 219–222]. У цьому випадку вібраційний сигнал можна описати суперпозицією амплітудних і фазово-модульованих несучих гармонік з багатьма частотами [211–213]:

$$\xi(t) = \sum_{k=-L}^L \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} = \xi_0(t) + \sum_{k=1}^L [\xi_k^c(t) \cos k\omega_0 t + \xi_k^s(t) \sin k\omega_0 t], \quad (5.1.3)$$

тут $\xi_k(t) = \frac{1}{2} [\xi_k^c(t) - i\xi_k^s(t)]$ є взаємно стаціонарними випадковими процесами.

Оскільки властивості перетворення Гільберта від сигналу (5.1.3) залежать від смуги частот, в якій зосереджені спектральні густини потужностей $\xi_k(t)$, доцільно розглянути окремо низько- та високочастотні модуляції. Перший випадок, коли спектри модулюючих процесів зосереджені в інтервалі $[-\omega_m, \omega_m]$ і $\omega_m < \omega_0$ було розглянуто в [166]. Показано, що аналітичний сигнал для монокомпонентного ПНВС

$$v_k(t) = \xi_k^c(t) \cos k\omega_0 t + \xi_k^s(t) \sin k\omega_0 t$$

є стаціонарним випадковим процесом і його дисперсія дорівнює подвоєному значенню величини $B_0^{(\xi)}(0)$. Періодична нестаціонарність багатокомпонентного аналітичного сигналу може бути викликана тільки кореляцією компонент $v_k(t)$ з різними номерами k . Це означає, що сумарна потужність часових періодичних змін дисперсії аналітичного сигналу менша за подвоєну дисперсію

необробленого сигналу, а використання “квадрату спектру огинаючої” може лише погіршити ефективність виявлення пошкодження.

Якщо всі модулюючі процеси у представленні (5.1.1) пропорційні тому самому стаціонарному процесу $\mu(t)$ тобто $\xi_k(t) = c_k \mu(t)$ де c_k деякі комплексні числа, ми отримуємо мультиплікативну модель [210]:

$$\xi(t) = \mu(t) \sum_{k \in Z} c_k e^{ik\omega_0 t} = \mu(t) s(t) \quad (5.1.4)$$

де

$$s(t) = \sum_{k \in Z} c_k e^{ik\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k \in Z} a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k \in Z} b_k \sin k\omega_0 t \quad (5.1.5)$$

і $c_0 = a_0$, $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$. Функція математичного сподівання $m_\xi(t) = E\xi(t)$ і кореляційна функція $b_\xi(t, u) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$ ($\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t)$) від (5.1.4) визначаються наступним чином:

$$m_\xi(t) = m_\mu s(t),$$

$$b_\xi(t, u) = R_\mu(u) s(t) s(t+u),$$

де $m_\mu = E\mu(t)$, $R_\mu(u) = E\overset{\circ}{\mu}(t)\overset{\circ}{\mu}(t+u)$, $\overset{\circ}{\mu}(t) = \mu(t) - m_\mu$. Допустимо, що $m_\mu = 0$ і ряд (5.1.5) є конечним з максимальним числом гармонік рівним L . Тоді (Додаток Ж):

$$s(t) s(t+u) = \sum_{k=-2L}^{2L} r_k(u) e^{ik\omega_0 t},$$

$$r_k(u) = \sum_{l \in M} c_l \bar{c}_{l-k} e^{il\omega_0 u} \quad (5.1.6)$$

де “ $\bar{}$ ” є знак спряження, а множина $M = \{-L, \dots, k+L\}$ для $k \leq 0$ і $M = \{k-L, \dots, L\}$ для $k > 0$. Для кореляційної функції сигналу (5.1.4) маємо:

$$b_\xi(t, u) = \sum_{k=-2L}^{2L} B_k^{(\xi)}(u) e^{ik\omega_0 t},$$

де k -та кореляційна компонента рівна

$$B_k^{(\xi)}(u) = r_k(u)R_\mu(u).$$

Спектральні компоненти

$$f_k^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^{(\xi)}(u) e^{-i\omega u} du$$

визначаються формулою

$$f_k^{(\xi)}(\omega) = \sum_{l \in M} c_l \bar{c}_{l-k} f_\mu(\omega - l\omega_0), \quad (5.1.7)$$

де $f_\mu(\omega)$ є спектральна густина потужності модулюючого процесу:

$$f_\mu(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\mu(u) e^{-i\omega u} du.$$

Нульові кореляційний та спектральний компоненти мають вигляд:

$$B_0^{(\xi)}(u) = R_\mu(u) \sum_{l=-L}^L |c_l|^2 e^{il\omega_0 u} = R_\mu(u) \left[a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (a_l^2 + b_l^2) \cos l\omega_0 u \right],$$

$$f_0^{(\xi)}(\omega) = \sum_{l=-L}^L |c_l|^2 f_\mu(\omega - l\omega_0) = a_0^2 f_\mu(\omega) +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{l=1}^L (a_l^2 + b_l^2) [f_\mu(\omega - l\omega_0) + f_\mu(\omega + l\omega_0)] \quad (5.1.8)$$

Функція (5.1.8) визначає спектральний склад сигналу (5.1.4). Як ми бачимо, спектр сигналу зосереджений в інтервалі $[\nu_0 - \omega_m - L\omega_0, \nu_0 + \omega_m + L\omega_0]$ при цьому $[\nu_0 - \omega_m, \nu_0 + \omega_m]$ – смуга частот модулюючого сигналу $\mu(t)$.

Спектральні властивості сигналу (5.1.4) залежать від швидкості зникання кореляційної функції модулюючого процесу $\mu(t)$. Спектральна густина $f_\mu(\omega)$ є вузькосмугою, оскільки вона повільно згасає, і в цьому випадку $f_0^{(\xi)}(\omega)$ має гребінчасту форму з піками в точках $k\omega_0$ [210-213]. Далі будуть окремо розглянуті випадки широкосмугової та вузькосмугової модуляції.

5.1. Модель ПНВС з широкосмуговою високочастотною модуляцією несучої та її аналіз.

Допустимо, що одностороння спектральна густина потужності модулюючої $\mu(t)$ зосереджена в інтервалі $[\nu_0 - \omega_m, \nu_0 + \omega_m]$ і $[\nu_0 - \omega_m > L\omega_0]$. Це означає, що ми маємо справу з таким модулюючим процесом $\mu(t)$, спектр якого не перекривається з спектром періодичної несучої (5.1.5). З урахуванням теореми Бедрояна [48] для перетворення Гільберта сигналу маємо:

$$\zeta(t) = H\{\xi(t)\} = s(t)\tilde{\mu}(t), \quad (5.1.9)$$

де $\tilde{\mu}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\mu(\tau)d\tau$ і $h(t) = (\pi t)^{-1}$. З урахуванням формули зворотного перетворення Гільберта $\mu(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\tilde{\mu}(\tau)d\tau$ ми отримаємо Гільберт пари:

$$R_{\mu}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau)R_{\tilde{\mu}\mu}(\tau)d\tau, \quad R_{\tilde{\mu}\mu}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau)R_{\mu}(\tau)d\tau, \quad (5.1.10)$$

$$R_{\tilde{\mu}}(\tau) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau)R_{\mu\tilde{\mu}}(\tau)d\tau, \quad R_{\mu\tilde{\mu}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau)R_{\tilde{\mu}}(\tau)d\tau, \quad (5.1.11)$$

де $R_{\mu}(u) = E\tilde{\mu}(t)\tilde{\mu}(t+u)$, $R_{\tilde{\mu}\mu}(u) = E\tilde{\mu}(t)\mu(t+u)$ і $R_{\mu\tilde{\mu}}(u) = E\mu(t)\tilde{\mu}(t+u)$.

З (5.1.10) і (5.1.11) випливає, що спектральна густина потужності модулюючого процесу $f_{\mu}(\omega)$, спектральна густина потужності перетворення Гільберта

$$f_{\tilde{\mu}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\tilde{\mu}}(u)e^{-i\omega u} du$$

та їх взаємні спектральні густини

$$f_{\tilde{\mu}\mu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\tilde{\mu}\mu}(u)e^{-i\omega u} du,$$

$$f_{\mu\tilde{\mu}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu\tilde{\mu}}(u)e^{-i\omega u} du,$$

пов'язані наступними співвідношеннями:

$$f_{\mu}(\omega) = H(\omega) f_{\bar{\mu}}(\omega), \quad f_{\bar{\mu}}(\omega) = -H(\omega) f_{\mu}(\omega), \quad (5.1.12)$$

$$f_{\bar{\mu}}(\omega) = -H(\omega) f_{\mu\bar{\mu}}(\omega), \quad f_{\mu\bar{\mu}}(\omega) = H(\omega) f_{\bar{\mu}}(\omega), \quad (5.1.13)$$

де $H(\omega) = -i$ для $\omega > 0$ і $H(\omega) = i$ для $\omega < 0$.

Виходячи з (5.1.4) і (5.1.9) отримуємо вирази для автокореляційної функції перетворення Гільберта і взаємокореляційних функцій:

$$b_{\eta}(t, u) = \sum_{k=-2L}^{2L} B_k^{(\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad b_{\xi\eta}(t, u) = \sum_{k=-2L}^{2L} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad (5.1.14)$$

$$b_{\eta\xi}(t, u) = \sum_{k=-2L}^{2L} B_k^{(\eta\xi)}(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad (5.1.15)$$

де

$$B_k^{(\eta)}(u) = R_{\bar{\mu}}(u) r_k(u), \quad B_k^{(\xi\eta)}(u) = R_{\mu\bar{\mu}}(u) r_k(u), \quad (5.1.16)$$

$$B_k^{(\eta\xi)}(u) = R_{\bar{\mu}\mu}(u) r_k(u). \quad (5.1.17)$$

Тоді спектральні складові дорівнюють:

$$f_k^{\eta}(\omega) = \sum_{l \in M} c_l \bar{c}_{l-k} f_{\bar{\mu}}(\omega - l\omega_0),$$

$$f_k^{\xi\eta}(\omega) = \sum_{l \in M} c_l \bar{c}_{l-k} f_{\mu\bar{\mu}}(\omega - l\omega_0),$$

$$f_k^{\eta\xi}(\omega) = \sum_{l \in M} c_l \bar{c}_{l-k} f_{\bar{\mu}\mu}(\omega - l\omega_0).$$

Теорема 5.1.1. Кореляційна функція сигналу (5.1.4) та його перетворення Гільберта однакові, а їхні взаємні кореляційні функції (5.1.14) і (5.1.15) відрізняються лише знаком, при цьому взаємо-кореляційні компоненти визначаються за формулою:

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = -B_k^{(\eta\xi)}(u) = \left[2 \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu}(\omega) \sin \omega u d\omega \right] r_k(u). \quad (5.1.18)$$

Доведення.

Оскільки

$$f_{\bar{\mu}\mu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\bar{\mu}\mu}(-u) e^{-i\omega u} du = \bar{f}_{\bar{\mu}\mu}(\omega),$$

то

$$f_{\bar{\mu}}(\omega) = -H(\omega)H(\omega)f_{\mu}(\omega) = f_{\mu}(\omega),$$

і $b_{\eta}(t, u) = b_{\xi}(t, u)$.

Беручи до уваги (5.1.12) і (5.1.13), маємо:

$$\bar{f}_{\bar{\mu}\bar{\mu}}(\omega) = H(\omega)\bar{f}_{\mu}(\omega) = H(\omega)H(\omega)\bar{f}_{\bar{\mu}\bar{\mu}}(\omega) = -\bar{f}_{\bar{\mu}\bar{\mu}}(\omega).$$

Отже

$$R_{\bar{\mu}\bar{\mu}}(u) = R_{\bar{\mu}\bar{\mu}}(-u) = -R_{\bar{\mu}\bar{\mu}}(u).$$

Таким чином, взаємна кореляційна функція модулюючого процесу та його перетворення Гільберта є непарними функціями і відрізняються лише знаком. Виходячи з (5.1.16) і (5.1.17) отримуємо $B_k^{(\xi\eta)}(u) = -B_k^{(\eta\xi)}(u)$ і отже $b_{\eta\xi}(t, u) = -b_{\xi\eta}(t, u)$.

Оскільки $f_{\bar{\mu}\bar{\mu}}(\omega) = H(\omega)f_{\mu}(\omega)$, тоді

$$R_{\bar{\mu}\bar{\mu}}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)f_{\mu}(\omega)e^{i\omega u} d\omega = i \int_{-\infty}^0 f_{\mu}(\omega)e^{i\omega u} d\omega - i \int_0^{\infty} f_{\mu}(\omega)e^{i\omega u} d\omega = 2 \int_0^{\infty} f_{\mu}(\omega) \sin \omega u d\omega.$$

Враховуючи (5.1.16), прийдемо до виразу (5.1.18).

Теорему доведено.

Наслідок 5. 1.1. Нульова кореляційна складова задовольняє рівність:

$$B_0^{\xi\eta}(u) = -B_0^{\eta\xi}(u) = B_0^{\eta\xi}(-u)$$

і визначається виразом

$$B_0^{\xi\eta}(u) = 2 \left[\sum_{l=-L}^L |c_l|^2 \cos l \omega_0 u \right] \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu}(\omega) \sin \omega u d\omega.$$

Тепер розглянемо аналітичний сигнал

$$\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t). \quad (5.1.19)$$

Його кореляційна функція $b_\zeta(t, u) = E[\bar{\zeta}(t)\zeta(t+u)]$ визначається виразом:

$$b_\zeta(t, u) = b_\xi(t, u) + b_\eta(t, u) + i[b_{\xi\eta}(t, u) - b_{\eta\xi}(t, u)].$$

Висновок 5. 2. Аналітичний сигнал (5.1.19) є комплекснозначним ПКВП і його кореляційна функція визначається рядом Фур'є

$$b_\zeta(t, u) = \sum_{k=-2L}^{2L} B_k^{(\zeta)}(u) e^{ik\omega_0 t},$$

де $B_k^{(\zeta)}(u) = 2[B_k^{(\xi)}(u) + iB_k^{(\xi\eta)}(u)]$.

Вираз для кореляційних компонент аналітичного сигналу безпосередньо випливають з **Теорема 5.1.1**, а саме з рівностей $b_\zeta(t, u) = b_\eta(t, u)$ і $b_{\xi\eta}(t, u) = -b_{\eta\xi}(t, u)$.

Оскільки $B_k^{(\xi\eta)}(0) = 0$, то дисперсія аналітичного сигналу дорівнює сумі дисперсій сигналу (5.1.4) та його перетворення Гільберта [208-211]:

$$b_\zeta(t, 0) = E\xi^2(t) + E\eta^2(t) = 2b_\xi(t, 0) = 2R_\mu(0)s^2(t). \quad (5.1.20)$$

Функція $|\zeta(t)| = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}$ в літературі називається сигналом огибаючої, а $|\zeta(t)|^2$ – квадратом огибаючої. Як ми бачимо, ці величини не є детермінованими функціями, вони є ПКВП. З (5.1.20) випливає, що математичне сподівання квадрата огибаючої дорівнює подвоєній дисперсії сигналу (5.1.4), амплітуда гармонік якого визначається амплітудою квадрата функції (5.1.5), що описує низькочастотну несучу. Це означає, що амплітуда кожної з гармонік дисперсії визначається добутками всіх несучих гармонік, номери яких зміщені на величину k . Зауважимо, що періодична у часі

дисперсія присутня на фоні стаціонарного процесу з потужністю

$$B_0(0) = \sum_{l=-L}^L |c_l|^2 R_\mu(0), \text{ що пропорційна усередненій за часом потужності } s(t).$$

Розглянемо властивості сигналу (5.1.4) після смугової фільтрації. Припустимо, що “прямокутна” функція передачі фільтра задана наступним чином:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2], \\ 0 & \text{for other } \omega. \end{cases} \quad (5.1.21)$$

Теорема 5.1.2. *Якщо $[\omega_1, \omega_2] \in [v_0 - \omega_m - L\omega_0, v_0 + \omega_m + L\omega_0]$ де ω_1 і ω_2 – деякі значення циклічних частот, то смугова фільтрація амплітудно-модульованого сигналу (5.1.4) з передатною функцією виду (5.1.21) призводить до зменшення амплітуд окремих гармонік його дисперсії, та потужності стаціонарного фону. Ці величини відповідно визначаються співвідношеннями:*

$$\left| B_k^{(\xi_f)}(0) \right| = \sum_{l \in M} \bar{c}_{l-k} c_l \left[\int_{\omega_1+k\omega_0}^{\omega_2} [f_\mu(\omega - l\omega_0) + f_\mu(\omega + l\omega_0)] d\omega \right], \quad (5.1.22)$$

$$B_0^{(\xi_f)}(0) = \sum_{l=-L}^L |c_l|^2 \left[\int_{\omega_1}^{\omega_2} [f_\mu(\omega - l\omega_0) + f_\mu(\omega + l\omega_0)] d\omega \right]. \quad (5.1.23)$$

Відношення $\left| B_k^{(\xi_f)}(0) \right| / B_0^{(\xi_f)}(0)$ зменшується з ростом номера гармоніки k і

$$\left| B_k^{(\xi_f)}(0) \right| = 0 \text{ для } \omega_1 + k\omega_0 \geq \omega_2.$$

Доведення.

Для отримання виразу для кореляційної функції сигналу на виході фільтра використовуємо гармонічне представлення ПКВП [20, 141]:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dz(\omega),$$

де

$$Edz(\omega) = 0$$

і

$$Ed\bar{z}(\omega_2)dz(\omega_1) = \sum_{k \in Z} f_k(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1 + k\omega_0) d\omega_1 d\omega_2 \quad (5.1.24)$$

Тут $\delta(\omega)$ дельта-функція Дірака. Для кореляційних складових відфільтрованого сигналу

$$\xi_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} dz(\omega), \quad (5.1.25)$$

маємо (Додаток И):

$$B_k^{(\xi_f)}(0) = \int_{\omega_1 + k\omega_0}^{\omega_2} [f_k(\omega) + f_k(\omega + k\omega_0)] d\omega.$$

Враховуючи вираз (5.1.24), приходимо до (5.1.22) і (5.1.23). Кореляційні компоненти сигналу до фільтрації дорівнюють:

$$B_0^{(\xi)}(0) = \sum_{l=-L}^L |c_l|^2 \int_{\nu_0 - \omega_m - L\omega_0}^{\nu_0 + \omega_m + L\omega_0} [f_\mu(\omega - l\omega_0) + f_\mu(\omega + l\omega_0)] d\omega,$$

$$B_k^{(\xi)}(0) = \sum_{l \in M} \bar{c}_{l-k} c_l \int_{\nu_0 - \omega_m - L\omega_0}^{\nu_0 + \omega_m + L\omega_0} [f_\mu(\omega - l\omega_0) + f_\mu(\omega + l\omega_0)] d\omega.$$

Оскільки $[\omega_1, \omega_2] \in [\nu_0 - \omega_m - L\omega_0, \nu_0 + \omega_m + L\omega_0]$ і $f_\mu(\omega) \geq 0$, то $B_0^{(\xi_f)}(0) \leq B_0^{(\xi)}(0)$ і $|B_k^{(\xi_f)}(0)| \leq |B_k^{(\xi)}(0)|$.

Теорема доведена.

Підсумовуючи цей підрозділ, слід зазначити, що сума квадратів сигналу та його перетворення Гільберта є сумою двох однакових ПКВП, і функція його математичного сподівання рівна подвоєній дисперсії вхідного сигналу. Ця сума не є квадратом огинаючої у його звичайному розумінні. Аналіз цієї величини не дає жодних нових результатів у порівнянні з аналізом вихідного сигналу. Цей аналіз можна провести лише за допомогою методів ПКВП. Це не може бути перетворенням Фур'є, оскільки результати його застосування для аналізу реалізації випадкових процесів не є слушними.

5.2. Модель ПНВС з вузькосмуговою високочастотною модуляцією несучої та її аналіз.

Припустимо, що $\omega_m < \omega_0/2$ і представимо модулюючий процес $\mu(t)$ у вигляді співвідношення Райса:

$$\mu(t) = \mu_c(t) \cos \nu_0 t + \mu_s(t) \sin \nu_0 t. \quad (5.2.1)$$

Якщо автокореляційні функції квадратур $R_\mu^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{\mu}_{c,s}(t+u) \overset{\circ}{\mu}_{c,s}(t)$, $\overset{\circ}{\mu}_{c,s}(t) = \mu_{c,s}(t) - m_{c,s}$, $m_{c,s} = E \mu_{c,s}(t)$, рівні $R_\mu^c(u) = R_\mu^s(u)$, а функція взаємної кореляції $R_\mu^{cs}(u) = E \overset{\circ}{\mu}_c(t+u) \overset{\circ}{\mu}_s(t)$ є непарною функцією $R_\mu^{cs}(-u) = -R_\mu^{cs}(u)$, то $\mu(t)$ є стаціонарним випадковим процесом і його кореляційна функція дорівнює [158]:

$$R_\mu(u) = R_\mu^c(u) \cos \nu_0 u + R_\mu^{cs}(u) \sin \nu_0 u.$$

Далі ми будемо вважати, що $m_{c,s} = 0$. Кореляційна функція перетворення Гільберта має таку форму:

$$\tilde{\mu}(t) = \mu_c(t) \sin \nu_0 t - \mu_s(t) \cos \nu_0 t, \quad (5.2.2)$$

Спектральні густини потужності (5.2.1) і (5.2.2) визначаються виразом:

$$f_\mu(\omega) = f_{\tilde{\mu}}(\omega) = \frac{1}{2} [f_c(\omega - \nu_0) + f_c(\omega + \nu_0) - f_{cs}(\omega - \nu_0) + f_{cs}(\omega + \nu_0)], \quad (5.2.3)$$

де $f_{c,s}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\mu^{c,s}(u) e^{-i\omega u} du$, $f_{cs}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\mu^{cs}(u) e^{-i\omega u} du$. Функція (5.2.3) має

гострі піки в точках $\omega = \pm \nu_0$, якщо модуляція вузькосмугова. У цьому випадку ми можемо прийняти що:

$$f_\mu(\omega) = \frac{1}{2} \begin{cases} [f_c(\omega - \nu_0) - f_{cs}(\omega - \nu_0)], & \omega > 0, \\ [f_c(\omega + \nu_0) + f_{cs}(\omega + \nu_0)], & \omega < 0. \end{cases}$$

Для взаємних кореляційних функцій (5.2.1) і (5.2.2) отримуємо:

$$R_{\mu\bar{\mu}}(u) = -R_{\bar{\mu}\mu}(u) = R_{\mu}^c(u) \sin \nu_0 u - R_{\mu}^{cs}(u) \cos \nu_0 u.$$

Звідси взаємні спектральні густини:

$$f_{\mu\bar{\mu}}(\omega) = -f_{\bar{\mu}\mu}(\omega) = \frac{1}{2} [f_c(\omega + \nu_0) - f_c(\omega - \nu_0) + f_{cs}(\omega + \nu_0) - f_{cs}(\omega - \nu_0)].$$

Представимо функцію (5.1.6) у вигляді $r_k(u) = \frac{1}{2} [r_k^c(u) - ir_k^s(u)]$, де

$$r_k^c(u) = \frac{1}{2} \sum_{l \in M} [(a_l a_{l-k} + b_l b_{l-k}) \cos l \omega_0 u - (a_l b_{l-k} - b_l a_{l-k}) \sin l \omega_0 u],$$

$$r_k^s(u) = \frac{1}{2} \sum_{l \in M} [(b_l a_{l-k} - a_l b_{l-k}) \cos l \omega_0 u - (a_l a_{l-k} + b_l a_{l-k}) \sin l \omega_0 u].$$

Для $k = 0$ ми маємо:

$$r_0(u) = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (a_l^2 + b_l^2) \cos l \omega_0 u.$$

Тоді кореляційні компоненти сигналу (5.2.1) та його перетворення Гільберта (5.2.2) дорівнюють:

$$B_0^{(n)}(u) = B_0^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} R_{\mu}(u) \left[a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (a_l^2 + b_l^2) \cos l \omega_0 u \right], \quad (5.2.4)$$

$$\begin{aligned} B_k^{(n)}(u) &= B_k^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} R_{\mu}(u) [r_k^c(u) + ir_k^s(u)] = \\ &= \frac{1}{4} R_{\mu}(u) \sum_{l \in M} [a_{l-k} a_l + b_{l-k} b_l + i(a_l b_{l-k} - b_l a_{l-k})] e^{il \omega_0 u}. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Виходячи з (5.2.3 - 5.2.4) для спектральних складових отримуємо:

$$f_0^{(n)}(\omega) = f_0^{(\xi)}(\omega) = a_0 f_{\mu}(\omega) + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^L (a_l^2 + b_l^2) [f_{\mu}(\omega + l \omega_0) + f_{\mu}(\omega - l \omega_0)], \quad (5.2.6)$$

$$f_k^{(n)}(\omega) = f_k^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{4} \sum_{l \in M} [a_l a_{l-k} + b_l b_{l-k} + i(a_l b_{l-k} - b_l a_{l-k})] f_{\mu}(\omega + l \omega_0). \quad (5.2.7)$$

Залежності функцій (5.2.4) і (5.2.5) від частоти мають гребінчасту форму з піками в точках $\omega = \nu_0 \pm l\omega_0$. Величини нульових спектральних компонент однакові в точках $\omega = \nu_0 + l\omega_0$ і $\omega = \nu_0 - l\omega_0$, тобто вони є симетричні відносно точки ν_0 . Кожна компонента, спектр якої зосереджений в інтервалі $\left[\nu_0 \pm l\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, \nu_0 \pm l\omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \right]$, може бути виділена за допомогою фільтра з відповідною “прямокутною” передаточною функцією, тобто:

$$H_l(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in \left[-\nu_0 \pm l\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, -\nu_0 \pm l\omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \right] \cup \left[\nu_0 \pm l\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, \nu_0 \pm l\omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \right], \\ 0 \text{ for other } \omega. \end{cases} \quad (5.2.8)$$

Ми можемо переписати представлення сигналу у вигляді суперпозиції цих компонентів:

$$\xi(t) = a_0 [\mu_c(t) \cos \nu_0 t + \mu_s(t) \sin \nu_0 t] + \sum_{l=1}^L [\xi_l^+(t) + \xi_l^-(t)].$$

Тут

$$\xi_l^+(t) = p_l^c(t) \cos(\nu_0 + l\omega_0)t + p_l^s(t) \sin(\nu_0 + l\omega_0)t, \quad (5.2.9)$$

$$\xi_l^-(t) = q_l^c(t) \cos(\nu_0 - l\omega_0)t + q_l^s(t) \sin(\nu_0 - l\omega_0)t, \quad (5.2.10)$$

і

$$p_l^c(t) = \frac{1}{2} [a_l \mu_c(t) - b_l \mu_s(t)], \quad p_l^s(t) = \frac{1}{2} [a_l \mu_s(t) + b_l \mu_c(t)], \quad (5.2.11)$$

$$q_l^c(t) = \frac{1}{2} [a_l \mu_c(t) + b_l \mu_s(t)], \quad q_l^s(t) = \frac{1}{2} [a_l \mu_s(t) - b_l \mu_c(t)]. \quad (5.2.12)$$

Теорема 5.2.1. Компоненти (5.2.9) і (5.2.10) є стаціонарними випадковими процесами, автокореляційна функція яких визначається за формулами:

$$R_{\xi_l^+}(u) = \frac{1}{4} (a_l^2 + b_l^2) [R_\mu^c(u) \cos(\nu_0 + l\omega_0)u + R_\mu^{cs}(u) \sin(\nu_0 + l\omega_0)u], \quad (5.2.13)$$

$$R_{\xi_l^-}(u) = \frac{1}{4} (a_l^2 + b_l^2) [R_\mu^c(u) \cos(\nu_0 - l\omega_0)u + R_\mu^{cs}(u) \sin(\nu_0 - l\omega_0)u]. \quad (5.2.14)$$

Доведення.

Компоненти (5.2.9) і (5.2.10) будуть стаціонарними випадковими процесами, коли автокореляційні функції

$$R_{p_l}^{c,s}(u) = E p_l^{c,s}(t) p_l^{c,s}(t+u), \quad R_{q_l}^{c,s}(u) = E q_l^{c,s}(t) q_l^{c,s}(t+u)$$

і взаємні кореляційні функції

$$R_{p_l}^{cs}(u) = E p_l^c(t) p_l^s(t+u), \quad R_{q_l}^{cs}(u) = E q_l^c(t) q_l^s(t+u)$$

задовольняють рівності:

$$R_{p_l}^c(u) = R_{p_l}^s(u), \quad R_{q_l}^c(u) = R_{q_l}^s(u), \quad (5.2.15)$$

$$R_{p_l}^{cs}(-u) = -R_{p_l}^{cs}(u), \quad R_{q_l}^{cs}(-u) = -R_{q_l}^{cs}(u). \quad (5.2.16)$$

У цьому випадку їх автокореляційні функції визначаються виразами:

$$R_{\xi_l^+}(u) = R_{p_l}^c(u) \cos(\nu_0 + l\omega_0)u + R_{p_l}^{cs}(u) \sin(\nu_0 + l\omega_0)u, \quad (5.2.17)$$

$$R_{\xi_l^-}(u) = R_{q_l}^c(u) \cos(\nu_0 - l\omega_0)u + R_{q_l}^{cs}(u) \sin(\nu_0 - l\omega_0)u. \quad (5.2.18)$$

Застосовуючи (5.2.11) до автокореляційних функцій (5.2.15), отримуємо:

$$R_{p_l}^c(u) = \frac{1}{4} \left[a_l^2 R_{\mu}^c(u) + b_l^2 R_{\mu}^s(u) - a_l b_l (R_{\mu}^{cs}(u) + R_{\mu}^{sc}(u)) \right],$$

$$R_{p_l}^s(u) = \frac{1}{4} \left[a_l^2 R_{\mu}^s(u) + b_l^2 R_{\mu}^c(u) + a_l b_l (R_{\mu}^{cs}(u) + R_{\mu}^{sc}(u)) \right].$$

Беручи до уваги рівності $R_{\mu}^c(u) = R_{\mu}^s(u)$ і $R_{\mu}^{sc}(u) = R_{\mu}^{cs}(-u) = -R_{\mu}^{cs}(u)$, отримуємо:

$$R_{p_l}^c(u) = R_{p_l}^s(u) = \frac{1}{4} (a_l^2 + b_l^2) R_{\mu}^c(u). \quad (5.2.19)$$

Взаємо кореляційна функція дорівнює:

$$R_{p_l}^{cs}(u) = \frac{1}{4} \left[a_l^2 R_{\mu}^{cs}(u) - b_l^2 R_{\mu}^{sc}(u) + a_l b_l [R_{\mu}^c(u) - R_{\mu}^s(u)] \right].$$

Отже

$$R_{p_l}^{cs}(u) = \frac{1}{4}(a_l^2 + b_l^2)R_\mu^{cs}(u),$$

$$R_{p_l}^{cs}(-u) = -R_{p_l}^{cs}(u).$$

Використовуючи (5.2.11), аналогічно отримуємо:

$$R_{q_l}^c(u) = R_{q_l}^s(u) = \frac{1}{4}(a_l^2 + b_l^2)R_\mu^c(u), \quad (5.2.20)$$

$$R_{q_l}^{cs}(u) = \frac{1}{4}(a_l^2 + b_l^2)R_\mu^{cs}(u). \quad (5.2.21)$$

Таким чином, виконуються умови стаціонарності компонент (5.2.13) і (5.2.14). Підставляючи вирази (5.2.18)–(5.2.20) відповідно в (5.2.16) та (5.2.17), приходимо до формул (5.2.13) та (5.2.14). **Теорему доведено.**

Теорема 5.2.2. Компоненти (5.2.9) і (5.2.10) є взаємно ПНВС, а їхні взаємно кореляційні функції визначаються за формулами:

$$R_{\xi_k^+ \xi_l^+}(t, u) = \frac{1}{4} \left[\left[(a_k a_l + b_k b_l) R_\mu^c(u) + (a_k b_l - b_k a_l) R_\mu^{sc}(u) \right] \cos \left[(l - k) \omega_0 t + (v_0 + l \omega_0) u \right] + \left[(a_k b_l - b_k a_l) R_\mu^c(u) + (a_k a_l + b_k b_l) R_\mu^{sc}(u) \right] \sin \left[(l - k) \omega_0 t + (v_0 + l \omega_0) u \right] \right], \quad (5.2.22)$$

$$R_{\xi_k^- \xi_l^-}(t, u) = \frac{1}{4} \left[\left[(a_k a_l + b_k b_l) R_\mu^c(u) + (a_k b_l - b_k a_l) R_\mu^{cs}(u) \right] \cos \left[(k - l) \omega_0 t + (v_0 - l \omega_0) u \right] + \left[(a_k a_l + b_k b_l) R_\mu^{cs}(u) - (a_k b_l - a_l b_k) R_\mu^c(u) \right] \sin \left[(k - l) \omega_0 t + (v_0 - l \omega_0) u \right] \right], \quad (5.2.23)$$

$$R_{\xi_k^+ \xi_l^-}(t, u) = \frac{1}{4} \left[\left[(a_k a_l - b_k b_l) R_\mu^c(u) + (a_k b_l + a_l b_k) R_\mu^{cs}(u) \right] \cos \left[(l + k) \omega_0 t - (v_0 - l \omega_0) u \right] + \left[(a_k b_l + a_l b_k) R_\mu^c(u) - (a_k a_l - b_k b_l) R_\mu^{cs}(u) \right] \sin \left[(l + k) \omega_0 t - (v_0 - l \omega_0) u \right] \right] \quad (5.2.24)$$

і задовольняють рівності:

$$R_{\xi_l^+ \xi_k^+}(t, u) = R_{\xi_k^+ \xi_l^+}(t + u, -u), \quad R_{\xi_l^- \xi_k^-}(t, u) = R_{\xi_k^- \xi_l^-}(t + u, -u), \quad R_{\xi_l^+ \xi_k^-}(t, u) = R_{\xi_k^+ \xi_l^-}(t + u, -u).$$

Доведення.

Для спрощення аналізу переписемо вирази (5.2.9) і (5.2.10) у вигляді:

$$\xi_k^+(t) = p_k(t) e^{i(v_0 + k \omega_0)t} + \bar{p}_k(t) e^{-i(v_0 + k \omega_0)t}, \quad (5.2.25)$$

$$\xi_k^-(t) = q_k(t) e^{i(v_0 - k\omega_0)t} + \bar{q}_k(t) e^{-i(v_0 - k\omega_0)t}, \quad (5.2.26)$$

де

$$p_k(t) = \frac{1}{2} [p_k^c(t) - ip_k^s(t)], \quad q_k(t) = \frac{1}{2} [q_k^c(t) - iq_k^s(t)]. \quad (5.2.27)$$

Тоді

$$R_{\xi_k^+ \xi_l^+}^+(t, u) = 2Re \left\{ R_{\bar{p}_k p_l}(u) e^{i(l-k)\omega_0 t} e^{i(v_0 + l\omega_0)u} + R_{p_k p_l}(u) e^{i(2v_0 + (k+l)\omega_0)t} e^{i(v_0 + l\omega_0)u} \right\}, \quad (5.2.28)$$

$$R_{\xi_k^- \xi_l^-}^-(t, u) = 2Re \left\{ R_{\bar{q}_k q_l}(u) e^{i(k-l)\omega_0 t} e^{i(v_0 - l\omega_0)u} + R_{q_k q_l}(u) e^{i(2v_0 - (k+l)\omega_0)t} e^{i(v_0 - l\omega_0)u} \right\}, \quad (5.2.29)$$

$$R_{\xi_k^+ \xi_l^-}^+(t, u) = 2Re \left\{ R_{\bar{p}_k q_l}(u) e^{-i(l+k)\omega_0 t} e^{i(v_0 - l\omega_0)u} + R_{p_k q_l}(u) e^{i(2v_0 + (k-l)\omega_0)t} e^{i(v_0 - l\omega_0)u} \right\}, \quad (5.2.30)$$

де

$$R_{\bar{p}_k p_l}(u) = E \bar{p}_k(t) p_l(t+u), \quad R_{p_k p_l}(u) = E p_k(t) p_l(t+u),$$

$$R_{\bar{q}_k q_l}(u) = E \bar{q}_k(t) q_l(t+u), \quad R_{q_k q_l}(u) = E q_k(t) q_l(t+u),$$

$$R_{\bar{p}_k q_l}(u) = E \bar{p}_k(t) q_l(t+u), \quad R_{p_k q_l}(u) = E p_k(t) q_l(t+u).$$

Виходячи з (5.2.10) та (5.2.11) та (5.2.25)–(5.2.27), отримуємо (Додаток К):

$$R_{\bar{p}_k p_l}(u) = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} (a_k a_l + b_k b_l) R_\mu^c(u) + (a_k b_l - b_k a_l) R_\mu^{sc}(u) - \\ -i [(a_k a_l + b_k b_l) R_\mu^{cs}(u) + (a_k b_l - b_k a_l) R_\mu^c(u)] \end{array} \right], \quad R_{p_k p_l}(u) = 0, \quad (5.2.31)$$

$$R_{\bar{q}_k q_l}(u) = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} (a_k a_l + b_k b_l) R_\mu^c(u) + (a_k b_l - b_k a_l) R_\mu^{cs}(u) - \\ -i [(a_k a_l + b_k b_l) R_\mu^{cs}(u) - (a_k b_l - a_l b_k) R_\mu^c(u)] \end{array} \right], \quad R_{q_k q_l}(u) = 0, \quad (5.2.32)$$

$$R_{\bar{p}_k q_l}(u) = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} (a_k a_l - b_k b_l) R_\mu^c(u) + (a_l b_k + a_k b_l) R_\mu^{cs}(u) - \\ -i [(a_k a_l - b_k b_l) R_\mu^{cs}(u) - (a_k b_l + b_k a_l) R_\mu^c(u)] \end{array} \right], \quad R_{p_k q_l}(u) = 0. \quad (5.2.33)$$

Після підстановки співвідношень (5.2.31)–(5.2.33) у (5.2.25)–(5.2.27) приходимо до формул (5.2.22)–(5.2.24). З отриманих виразів випливає, що функції взаємної кореляції (5.2.28) і (5.2.29) періодично змінюються в часі, якщо $k \neq l$, функції взаємної кореляції (5.2.30) періодичні для всіх $k, l \in \overline{0, L}$. Ці кореляції

утворюють періодичні компоненти кореляційної функції сигналу. Величини (5.2.28) і (5.2.29) визначаються їх гармоніками з номерами $k-l$, а величини (5.2.30) визначаються гармоніками з номерами $k+l$. **Теорему доведено.**

Як видно з (5.2.4), амплітуди гармонік кореляційної функції сигналу пропорційні до кореляційної функції вузькосмугового процесу (5.2.1). Зауважимо, що квадратури цього процесу ми можемо розділити за допомогою перетворення Гільберта компонент (5.2.8) і (5.2.9):

$$\eta_l^+(t) = H\{\xi_l^+(t)\} = p_l^c(t)\sin(\nu_0 + l\omega_0)t - p_l^s(t)\cos(\nu_0 + l\omega_0)t, \quad (5.2.34)$$

$$\eta_l^-(t) = q_l^c(t)\sin(\nu_0 - l\omega_0)t - q_l^s(t)\cos(\nu_0 - l\omega_0)t. \quad (5.2.35)$$

Виходячи з (5.2.34) і (5.2.35), а також (5.2.8) і (5.2.9) маємо:

$$a_l\mu_c(t) - b_l\mu_s(t) = \xi_l^+(t)\cos(\nu_0 + l\omega_0)t + \eta_l^+(t)\sin(\nu_0 + l\omega_0)t,$$

$$a_l\mu_c(t) + b_l\mu_s(t) = \xi_l^-(t)\cos(\nu_0 - l\omega_0)t + \eta_l^-(t)\sin(\nu_0 - l\omega_0)t.$$

Отже

$$\mu_c(t) = \frac{1}{a_l} \left[\begin{array}{l} \xi_l^+(t)\cos(\nu_0 + l\omega_0)t + \eta_l^+(t)\sin(\nu_0 + l\omega_0)t + \\ + \xi_l^-(t)\cos(\nu_0 - l\omega_0)t + \eta_l^-(t)\sin(\nu_0 - l\omega_0)t \end{array} \right],$$

$$\mu_s(t) = \frac{1}{b_l} \left[\begin{array}{l} \xi_l^-(t)\cos(\nu_0 - l\omega_0)t + \eta_l^-(t)\sin(\nu_0 - l\omega_0)t - \\ - \xi_l^+(t)\cos(\nu_0 + l\omega_0)t - \eta_l^+(t)\sin(\nu_0 + l\omega_0)t \end{array} \right].$$

Отримані співвідношення можуть бути використані з метою виділення квадратур для подальшого аналізу їх кореляційних і спектральних властивостей.

Враховуючи співвідношення (5.2.16) і (5.2.17) для спектральних густин потужності компонент (5.2.8) і (5.2.9) отримуємо:

$$f_{\xi_l^+}(\omega) = \frac{1}{8}(a_l^2 + b_l^2) \left[\begin{array}{l} f_{\mu}^c(\omega - (\nu_0 + l\omega_0)) + f_{\mu}^c(\omega + (\nu_0 + l\omega_0)) - \\ - f_{\mu}^{cs}(\omega - (\nu_0 + l\omega_0)) + f_{\mu}^{cs}(\omega + (\nu_0 + l\omega_0)) \end{array} \right], \quad (5.2.36)$$

$$f_{\xi_i^-}(\omega) = \frac{1}{8}(a_i^2 + b_i^2) \left[\begin{array}{l} f_\mu^c(\omega - (\nu_0 - l\omega_0)) + f_\mu^c(\omega + (\nu_0 - l\omega_0)) - \\ - f_\mu^{cs}(\omega - (\nu_0 - l\omega_0)) + f_\mu^{cs}(\omega + (\nu_0 - l\omega_0)) \end{array} \right]. \quad (5.2.37)$$

Спектральні густини (5.2.36) і (5.2.37) мають різкі піки в точках $\omega = \omega \pm (\nu_0 \pm l\omega_0)$. Їх сума визначає l -ту складову усередненої за часом потужності сигналу (5.1.4). Для додатних частот маємо:

$$f_{\xi_i^+}(\omega) = \frac{1}{8}(a_i^2 + b_i^2) [f_\mu^c(\omega - (\nu_0 + l\omega_0)) - f_\mu^{cs}(\omega - (\nu_0 + l\omega_0))], \quad (5.2.38)$$

$$f_{\xi_i^-}(\omega) = \frac{1}{8}(a_i^2 + b_i^2) [f_\mu^c(\omega - (\nu_0 - l\omega_0)) - f_\mu^{cs}(\omega - (\nu_0 - l\omega_0))]. \quad (5.2.39)$$

Значення функції (5.2.38) у точці $\omega = \nu_0 + l\omega_0$ та функції (5.2.39) у точці $\omega = \nu_0 - l\omega_0$ однакові:

$$f_{\xi_i^+}(\nu_0 + l\omega_0) = f_{\xi_i^-}(\nu_0 - l\omega_0) = \frac{1}{8}(a_i^2 + b_i^2) f_\mu^c(0)$$

І оскільки

$$f_{\xi_i^+}(\nu_0 + l\omega_0 \pm \Delta\omega) = \frac{1}{4}(a_i^2 + b_i^2) [f_\mu^c(\Delta\omega) \mp f_\mu^{cs}(\Delta\omega)],$$

$$f_{\xi_i^-}(\nu_0 - l\omega_0 \pm \Delta\omega) = \frac{1}{4}(a_i^2 + b_i^2) [f_\mu^c(\Delta\omega) \mp f_\mu^{cs}(\Delta\omega)]$$

то ці функції симетричні відносно точок $\nu_0 \pm l\omega_0$.

Аналітичний сигнал для вузькосмугового випадку модуляції сигналу:

$$\zeta(t) = [\mu_c(t) - i\mu_s(t)] e^{i\nu_0 t} s(t).$$

“огинача”

$$|\zeta(t)| = \sqrt{\mu_c^2(t) + \mu_s^2(t)} s(t)$$

і квадрат “огиначої” є ПКВП. Функція математичного сподівання квадрату “огиначої”:

$$E[|\zeta(t)|^2] = [E\mu_c^2(t) + E\mu_s^2(t)] s^2(t) = 2R_\mu^c(0) s^2(t), \quad (5.2.40)$$

містить $2L$ гармонік з частотами $k\omega_0$, $k = \overline{1, 2L}$, амплітуди яких визначаються сумою добутків амплітуд гармонік $s(t)$, номери яких відрізняються на k . Зі збільшенням числа k кількість доданків у сумі зменшується з $2L$ до 1.

З (5.2.40) випливає, що значення спектральної густини потужності сигналу лежать в інтервалі $\left[\nu_0 - \left(L + \frac{1}{2} \right) \omega_0, \nu_0 + \left(L + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \right]$. Тому фільтрація сигналу з передатною функцією виду (5.1.21) буде зменшувати число корельованих компонент сигналу (5.2.8) і (5.2.9), взаємні кореляційні функції яких визначається за формулами (5.2.28)–(5.2.30). Це викликає як зменшення кількості гармонік дисперсії аналітичного сигналу (5.2.40), так і величину їх амплітуд. Зауважимо, що така фільтрація зменшує також величини нульових кореляційних та спектральних компонент, тобто потужність стаціонарного фону.

5.3. Модель ПНВС з високочастотною амплітудно-фазовою модуляцією несучої та її аналіз.

Далі проведено аналіз перетворення Гільберта для випадку амплітудно-фазової високочастотної модуляції, тобто випадку коли спектри модулюючих процесів зосереджені в інтервалі $[\gamma_0 - \omega_m, \gamma_0 + \omega_m]$ і $\gamma_0 - \omega_m > L\omega_0$. При цьому розглянуто окремо широкосмугову і вузькосмугову модуляції, а також випадки, коли низькочастотна несуча є однокомпонентною або багатоконпонентною гармонічною функцією.

5.3.1 Амплітудно-фазово-модульовані гармонійні коливання

Розглянемо квадратурну модель виду:

$$\xi(t) = \xi_c(t) \cos \omega_0 t + \xi_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (5.3.1)$$

де $\xi_c(t)$ і $\xi_s(t)$ – стаціонарні випадкові процеси з нульовим математичним сподіванням і автокореляційними функціями $R_c^{(\xi)}(u) = E \xi_c(t) \xi_c(t+u)$,

$R_s^{(\xi)}(u) = E\xi_s(t)\xi_s(t+u)$ і взаємкореляційною функцією

$R_{cs}^{(\xi)}(u) = E\xi_c(t)\xi_s(t+u)$. Виходячи з (5.3.1), маємо:

$$b_\xi(t, u) = B_0^{(\xi)}(u) + C_2^{(\xi)}(u)\cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi)}(u)\sin 2\omega_0 t, \quad (5.3.2)$$

де

$$B_0^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} [R_c^{(\xi)}(u) + R_s^{(\xi)}(u)] \cos \omega_0 u + \tilde{R}_{cs}(u) \sin \omega_0 u, \quad (5.3.3)$$

$$C_2^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} [R_c^{(\xi)}(u) - R_s^{(\xi)}(u)] \cos \omega_0 u + \tilde{R}_{cs}(u) \sin \omega_0 u, \quad (5.3.4)$$

$$S_2^{(\xi)}(u) = \tilde{R}_{cs}(u) \cos \omega_0 u + \frac{1}{2} [R_s^{(\xi)}(u) - R_c^{(\xi)}(u)] \sin \omega_0 u, \quad (5.3.5)$$

а функції $\tilde{R}_{cs}(u)$ і $\tilde{R}_{cs}(u)$ є парною і непарною частинами функції $R_{cs}(u)$.

Припустимо, що спектри квадратур

$$f_c^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R_c^{(\xi)} \cos \omega u du, \quad f_s^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R_s^{(\xi)} \sin \omega u du. \quad (5.3.6)$$

лежать в інтервалі $[\nu_0 - \omega_m, \nu_0 + \omega_m]$ і $\nu_0 - \omega_m > \omega_0$. Використовуючи теорему Бедрисяна [48] для перетворення Гільберта від (5.3.1), маємо:

$$\eta(t) = H \{ \xi(t) \} = \eta_c(t) \cos \omega_0 t + \eta_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (5.3.7)$$

де

$$\eta_c(t) = \int_{-\infty}^\infty h(t-\tau) \xi_c(\tau) d\tau, \quad \eta_s(t) = \int_{-\infty}^\infty h(t-\tau) \xi_s(\tau) d\tau. \quad (5.3.8)$$

Беручи до уваги (5.3.8) і

$$\xi_c(t) = - \int_{-\infty}^\infty h(t-\tau) \eta_c(\tau) d\tau,$$

$$\xi_s(t) = - \int_{-\infty}^\infty h(t-\tau) \eta_s(\tau) d\tau$$

ми отримуємо для кореляційних функцій $R_{c,s}^{(\eta)}(u) = E\eta_{c,s}(t)\eta_{c,s}(t+u)$ і

$$R_{c,s}^{(\xi\eta)}(u) = E\xi_{c,s}(t)\eta_{c,s}(t+u):$$

$$R_{c,s}^{(\xi)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{c,s}^{(\eta\xi)}(\tau) d\tau, \quad R_{c,s}^{(\eta\xi)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{c,s}^{(\xi)}(\tau) d\tau, \quad (5.3.9)$$

$$R_{c,s}^{(\eta)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{c,s}^{(\xi\eta)}(\tau) d\tau, \quad R_{c,s}^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{c,s}^{(\eta)}(\tau) d\tau. \quad (5.3.10)$$

З цих співвідношень випливає, що кореляційні функції $R_{c,s}^{(\xi)}(u)$ з $R_{c,s}^{(\eta\xi)}(u)$, і $R_{c,s}^{(\xi\eta)}(u)$ з $R_{c,s}^{(\eta)}(u)$ є парами перетворення Гільберта. Схожі пари ми отримуємо для кореляційних функцій сигналу та його перетворення Гільберта:

$$R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{cs}^{(\eta)}(\tau) d\tau, \quad R_{cs}^{(\eta)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{cs}^{(\xi\eta)}(\tau) d\tau,$$

$$R_{sc}^{(\eta)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{sc}^{(\xi\eta)}(\tau) d\tau, \quad R_{sc}^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{sc}^{(\eta)}(\tau) d\tau, \quad (5.3.11)$$

$$R_{cs}^{(\xi)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{cs}^{(\eta\xi)}(\tau) d\tau, \quad R_{cs}^{(\eta\xi)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{cs}^{(\xi)}(\tau) d\tau,$$

$$R_{sc}^{(\xi)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{sc}^{(\eta\xi)}(\tau) d\tau, \quad R_{sc}^{(\eta\xi)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{sc}^{(\xi)}(\tau) d\tau. \quad (5.3.12)$$

Теорема 5.3.1. Авто- та взаємкореляційні функції квадратур сигналу (5.3.1) і перетворення Гільберта його квадратур (5.3.7) однакові:

$$R_c^{(\eta)}(u) = R_c^{(\xi)}(u), \quad R_s^{(\eta)}(u) = R_s^{(\xi)}(u), \quad R_{cs}^{(\eta)}(u) = R_{cs}^{(\xi)}(u)$$

їх взаємно кореляційні функції відрізняються лише знаком:

$$R_c^{(\xi\eta)}(u) = -R_c^{(\eta\xi)}(u), \quad R_s^{(\xi\eta)}(u) = -R_s^{(\eta\xi)}(u),$$

$$R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) = -R_{cs}^{(\eta\xi)}(u), \quad R_{sc}^{(\xi\eta)}(u) = -R_{sc}^{(\eta\xi)}(u) \quad (5.3.13)$$

і визначаються формулами:

$$R_c^{(\xi\eta)}(u) = 2 \int_0^{\infty} f_c^{(\xi)}(\omega) \sin \omega u d\omega, \quad (5.3.14)$$

$$R_s^{(\xi\eta)}(u) = 2 \int_0^{\infty} f_s^{(\xi)}(\omega) \sin \omega u d\omega, \quad (5.3.15)$$

$$R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) = 2 \int_0^{\infty} \left[\tilde{f}_{cs}^{(\xi)}(\omega) \sin \omega u - \tilde{\tilde{f}}_{cs}^{(\xi)}(\omega) \cos \omega u \right] d\omega, \quad (5.3.16)$$

де

$$\tilde{f}_{cs}^{(\eta)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{R}_{cs}^{(\eta)}(u) \cos \omega u du, \quad (5.3.17)$$

$$\tilde{\tilde{f}}_{cs}^{(\eta)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\tilde{R}}_{cs}^{(\eta)}(u) \sin \omega u du. \quad (5.3.18)$$

Доведення.

Виходячи з (5.3.9) і (5.3.10) у просторі частот маємо:

$$f_{c,s}^{(\eta)}(\omega) = -H(\omega) f_{c,s}^{(\xi\eta)}(\omega), \quad f_{c,s}^{(\eta\xi)}(\omega) = -H(\omega) f_{c,s}^{(\xi)}(\omega).$$

Оскільки $f_{c,s}^{(\xi\eta)}(\omega) = \overline{f_{c,s}^{(\eta\xi)}(\omega)}$, то

$$f_{c,s}^{(\eta)}(\omega) = H(\omega) \overline{H(\omega)} f_{c,s}^{(\xi)}(\omega) = f_{c,s}^{(\xi)}(\omega),$$

і $R_{c,s}^{(\eta)}(u) = R_{c,s}^{(\xi)}(u)$.

З (5.3.11) і (5.3.12) випливає, що

$$f_{cs}^{(\xi)}(\omega) = H(\omega) f_{cs}^{(\eta\xi)}(\omega),$$

$$f_{sc}^{(\xi\eta)}(\omega) = H(\omega) f_{sc}^{(\eta)}(\omega).$$

Отже

$$f_{cs}^{(\xi)}(\omega) = H(\omega) \overline{f_{cs}^{(\eta\xi)}(\omega)} = H(\omega) \overline{H(\omega)} \overline{f_{sc}^{(\eta)}(\omega)} = f_{cs}^{(\eta)}(\omega),$$

і $R_{c,s}^{(\eta)}(u) = R_{c,s}^{(\xi)}(u)$.

Беручи до уваги рівняння:

$$f_{c,s}^{(\xi\eta)}(\omega) = H(\omega) f_{c,s}^{(\xi)}(\omega)$$

отримуємо

$$R_{c,s}^{(\xi\eta)}(u) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \omega f_{c,s}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega = 2 \int_0^{\infty} f_{c,s}^{(\xi)}(\omega) \sin \omega u d\omega.$$

Порівнюючи залежності

$$f_{cs}^{(\xi\eta)}(\omega) = H(\omega) f_{cs}^{(\eta)}(\omega),$$

$$f_{sc}^{(\xi\eta)}(\omega) = H(\omega) f_{sc}^{(\eta)}(\omega)$$

і

$$f_{cs}^{(\eta\xi)}(\omega) = -H(\omega) f_{cs}^{(\xi)}(\omega),$$

$$f_{sc}^{(\eta\xi)}(\omega) = -H(\omega) f_{sc}^{(\xi)}(\omega)$$

приходимо до висновку що $R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) = -R_{cs}^{(\eta\xi)}(u)$, $R_{sc}^{(\xi\eta)}(u) = -R_{sc}^{(\eta\xi)}(u)$, тобто рівності (5.3.13) вірні. Ми також маємо:

$$R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \omega f_{cs}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega = i \int_0^{\infty} [f_{cs}^{(\xi)}(-\omega) e^{-i\omega u} - f_{cs}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega. \quad (5.3.19)$$

Представимо спектральну густину взаємної кореляції у вигляді:

$$f_{cs}^{(\xi)}(\omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{R}_{cs}(u) + \tilde{\tilde{R}}_{cs}(u)] e^{i\omega u} du = \tilde{f}_{cs}(\omega) - i\tilde{\tilde{f}}_{cs}(\omega), \quad (5.3.20)$$

де $\tilde{f}_{cs}(\omega)$ і $\tilde{\tilde{f}}_{cs}(\omega)$ визначаються співвідношеннями (5.3.17) і (5.3.18). Після підстановки (5.3.10) в (5.3.19) приходимо до (5.3.16). **Теорему доведено.**

Теорема 5.3.2. Сигнал (5.3.1) і його перетворення Гільберта (5.3.7) є взаємно ПНВС, їх взаємо кореляційні функції $b_{\xi\eta}(t, u) = E\xi(t)\eta(t+u)$ і $b_{\eta\xi}(t, u) = E\eta(t)\xi(t+u)$ відрізняються лише знаком і мають вигляд:

$$b_{\xi\eta}(t, u) = -b_{\eta\xi}(t, u) = \sum_{k=0, \pm 2} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} [R_c^{(\xi\eta)}(u) + R_s^{(\xi\eta)}(u)] \cos \omega_0 u + \tilde{R}_{cs}^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega_0 u, \quad (5.3.21)$$

$$B_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{4} [R_c^{(\xi\eta)}(u) - R_s^{(\xi\eta)}(u) - 2i\tilde{\tilde{R}}_{cs}^{(\xi\eta)}(u)] e^{i\omega_0 u}, \quad (5.3.22)$$

при цьому $\tilde{R}_{cs}^{(\xi\eta)}(u)$ і $\tilde{\tilde{R}}_{cs}^{(\xi\eta)}(u)$ є парними і непарними частинами функції взаємної кореляції $R_{cs}^{(\xi\eta)}(u)$.

Доведення.

Виходячи з (5.3.1) і (5.3.7) отримуємо:

$$b_{\xi\eta}(t, u) = B_0^{(\xi\eta)}(u) + C_2^{(\xi\eta)}(u) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi\eta)}(u) \sin 2\omega_0 t,$$

де

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} [R_c^{(\xi\eta)}(u) + R_s^{(\xi\eta)}(u)] \cos \omega_0 u + \frac{1}{2} [R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) - R_{sc}^{(\xi\eta)}(u)] \sin \omega_0 u, \quad (5.3.23)$$

$$C_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} [R_c^{(\xi\eta)}(u) - R_s^{(\xi\eta)}(u)] \cos \omega_0 u + \frac{1}{2} [R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) + R_{sc}^{(\xi\eta)}(u)] \sin \omega_0 u,$$

$$S_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} [R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) + R_{sc}^{(\xi\eta)}(u)] \cos \omega_0 u - \frac{1}{2} [R_c^{(\xi\eta)}(u) - R_s^{(\xi\eta)}(u)] \sin \omega_0 u.$$

Беручи до уваги рівняння (5.3.13), маємо:

$$R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) - R_{sc}^{(\xi\eta)}(u) = R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) + R_{sc}^{(\eta\xi)}(u) = 2\tilde{R}_{cs}^{(\xi\eta)}(u),$$

$$R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) + R_{sc}^{(\xi\eta)}(u) = R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) - R_{sc}^{(\eta\xi)}(u) = 2\tilde{\tilde{R}}_{cs}^{(\xi\eta)}(u).$$

Використовуючи ці співвідношення, ми отримаємо вирази (5.3.21) - для нульової кореляційної компоненти і (5.3.22) - для другої

$$B_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} [C_2^{(\xi\eta)}(u) - iS_2^{(\xi\eta)}(u)] \text{ кореляційної компоненти.}$$

Оскільки $B_2^{(\eta\xi)}(u) = B_2^{(\xi\eta)}(-u)e^{i2\omega_0 u}$, тоді

$$B_2^{(\eta\xi)}(u) = \frac{1}{2} [R_c^{(\xi\eta)}(-u) - R_s^{(\xi\eta)}(-u) - 2i\tilde{R}_{cs}^{(\xi\eta)}(-u)] e^{i\omega_0 u} = -B_2^{(\xi\eta)}(u).$$

З (5.3.19) випливає, що $B_0^{(\xi\eta)}(-u) = -B_0^{(\xi\eta)}(u)$. Отже,

$B_0^{(\eta\xi)}(u) = B_0^{(\xi\eta)}(-u) = -B_0^{(\xi\eta)}(u)$. Таким чином $b_{\xi\eta}(t, u) = -b_{\eta\xi}(t, u)$. Теорему

доведено.

Виходячи з Теорема 5.3.1 та Теорема 5.3.2 для кореляційних функцій аналітичного сигналу отримуємо

$$b_{\zeta}(t, u) = 2 \left[b_{\xi}(t, u) + i b_{\xi\eta}(t, u) \right]. \quad (5.3.24)$$

Що є підставою для наступної теореми.

Теорема 5.3.3. Аналітичний сигнал $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$ є ПНВС, кореляційна функція якого має вигляд:

$$b_{\zeta}(t, u) = \sum_{k=0, \pm 2} B_k^{(\zeta)}(u) e^{ik\omega_0 t}$$

а його кореляційні компоненти визначаються за формулами:

$$B_0^{(\zeta)}(u) = \left[2 \int_0^{\infty} \left[f_c^{(\xi)}(\omega) + f_s^{(\xi)}(\omega) \right] e^{i\omega u} d\omega \right] \cos \omega_0 u - 4i \left[\int_0^{\infty} \tilde{f}_{cs}(\omega) e^{i\omega u} d\omega \right] \sin \omega_0 u, \quad (5.3.25)$$

$$B_2^{(\zeta)}(u) = \left[\int_0^{\infty} \left[f_c^{(\xi)}(\omega) - f_s^{(\xi)}(\omega) \right] e^{i\omega u} d\omega - 2i \int_0^{\infty} \tilde{f}_{cs}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega \right] e^{i\omega_0 u}. \quad (5.3.26)$$

Доведення.

З (5.3.24) випливає, що:

$$B_0^{(\zeta)}(u) = 2 \left[B_0^{(\xi)}(u) + i B_0^{(\xi\eta)}(u) \right], \quad (5.3.27)$$

$$B_2^{(\zeta)}(u) = 2 \left[B_2^{(\xi)}(u) + i B_2^{(\xi\eta)}(u) \right]. \quad (5.3.28)$$

Беручи до уваги (5.3.3), (5.3.21), співвідношення

$$R_c(u) = 2 \int_0^{\infty} f_c(\omega) \cos \omega u d\omega, \quad R_s(u) = 2 \int_0^{\infty} f_s(\omega) \cos \omega u d\omega \quad (5.3.29)$$

а також (5.3.14)–(5.3.16) ми маємо

$$B_0^{(\xi)}(u) = \int_0^{\infty} \left[\left[f_c^{(\xi)}(\omega) + f_s^{(\xi)}(\omega) \right] \cos \omega u \cos \omega_0 u + 2 \tilde{f}_{cs}(\omega) \sin \omega u \sin \omega_0 u \right] d\omega, \quad (5.3.30)$$

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = \int_0^{\infty} \left[\left[f_c^{(\xi)}(\omega) + f_s^{(\xi)}(\omega) \right] \sin \omega u \cos \omega_0 u - 2 \tilde{f}_{cs}(\omega) \cos \omega u \sin \omega_0 u \right] d\omega. \quad (5.3.31)$$

Виходячи з співвідношень (5.3.30) і (5.3.31) для нульової кореляційної складової аналітичного сигналу (5.3.27) отримаємо формулу (5.3.25).

Використовуючи (5.3.3)–(5.3.5) і (5.3.28), вираз для другої кореляційної компоненти сигналу $B_2^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} [C_2^{(\xi)}(u) - iS_2^{(\xi)}(u)]$ ми перепишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} B_2^{(\xi)}(u) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [R_c^{(\xi)}(u) - R_s^{(\xi)}(u)] - \tilde{R}_{cs}(u) \right] e^{i\omega_0 u} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty [f_c^{(\xi)}(\omega) - f_s^{(\xi)}(\omega) - 2\tilde{f}_{cs}(\omega)] \cos \omega u d\omega \right] e^{i\omega_0 u}. \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

Після підстановки (5.3.14)–(5.3.16) в (5.3.22) вираз для другої взаємно кореляційної складової набуває вигляду:

$$B_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty [f_c^{(\xi)}(\omega) - f_s^{(\xi)}(\omega) - 2\tilde{f}_{cs}(\omega)] \sin \omega u d\omega \right] e^{i\omega_0 u}. \quad (5.3.33)$$

З (5.3.32) і (5.3.33) випливає, що (5.3.28) дорівнює (5.3.26). **Теорему доведено.**

З (5.3.31) і (5.3.33) легко зауважити, що взаємно кореляційні компоненти $B_0^{(\xi\eta)}(u)$ і $B_2^{(\xi\eta)}(u)$ в точці $u = 0$ дорівнюють нулю. Тоді

$$b_\zeta(t, 0) = 2b_\xi(t, 0) = E\xi^2(t) + E\eta^2(t).$$

Наслідок 5.3.1. *Якщо гармонійна несуча є амплітудно- і фазово-модульована високою частотою, то сума квадратів сигналу та його перетворення Гільберта є ПНВС, математичне сподівання якого дорівнює подвійній дисперсії сигналу, тобто*

$$b_\zeta(t, 0) = B_0^{(\zeta)}(0) + C_2^{(\zeta)}(0) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\zeta)}(0) \sin 2\omega_0 t,$$

де

$$B_0^{(\zeta)}(0) = 2 \int_0^\infty [f_c(\omega) + f_s(\omega)] d\omega,$$

$$C_2^{(\zeta)}(0) = 2 \int_0^\infty [f_c(\omega) - f_s(\omega)] d\omega,$$

$$S_2^{(\zeta)}(0) = 4 \int_0^\infty \tilde{f}_{cs}(\omega) d\omega.$$

Зауважимо, що амплітуда дисперсії другої гармоніки $|B_2^{(\zeta)}(0)|$ завжди менша за величину дисперсії стаціонарного фону $B_0^{(\zeta)}(0)$: $|B_2^{(\zeta)}(0)| \leq |B_0^{(\zeta)}(0)|$.

Ми легко прийдемо до такого висновку після представлення $|B_2^{(\zeta)}(0)|$ у формі

$|B_2^{(\zeta)}(0)| = \sqrt{[R_c^{(\xi)}(0) - R_s^{(\xi)}(0)]^2 + 4[R_{cs}^{(\xi)}(0)]^2}$ та беручи до уваги відому нерівність:

$$[R_{cs}^{(\xi)}(u)]^2 \leq R_c^{(\xi)}(0)R_s^{(\xi)}(0).$$

5.3.2. Вузькосмугова гармонійна модуляція.

Далі розглянуто випадок, коли високочастотні квадратури є вузькосмуговими випадковими процесами. Припустимо, що $\omega = \nu_0$ це точка максимуму величини спектру модулюючих процесів $\xi_c(t)$ і $\xi_s(t)$. Представимо їх відомою формулою Райса:

$$\xi_c(t) = p_c(t)\cos\nu_0 t + p_s(t)\sin\nu_0 t, \quad (5.3.34)$$

$$\xi_s(t) = q_c(t)\cos\nu_0 t + q_s(t)\sin\nu_0 t. \quad (5.3.35)$$

Припустимо, що $p_{c,s}(t)$ і $q_{c,s}(t)$ є взаємно стаціонарними випадковими процесами і введемо наступні позначення:

$$r_p^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{p}_{c,s}(t) \overset{\circ}{p}_{c,s}(t+u), \quad r_q^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{q}_{c,s}(t) \overset{\circ}{q}_{c,s}(t+u),$$

$$r_{pq}^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{p}_{c,s}(t) \overset{\circ}{q}_{c,s}(t+u), \quad r_p^{cs}(u) = E \overset{\circ}{p}_c(t) \overset{\circ}{p}_s(t+u),$$

$$r_q^{cs}(u) = E \overset{\circ}{q}_c(t) \overset{\circ}{p}_s(t+u), \quad r_{pq}^{cs}(u) = E \overset{\circ}{p}_c(t) \overset{\circ}{q}_s(t+u),$$

$$\overset{\circ}{p}_{c,s}(t) = p_{c,s}(t) - m_p^{c,s}, \quad \overset{\circ}{q}_{c,s}(t) = q_{c,s}(t) - m_q^{c,s},$$

$$m_p^{c,s} = E p_{c,s}(t), \quad m_q^{c,s} = E q_{c,s}(t).$$

Теорема 5.3.4. Квадратури (5.3.34) і (5.3.35) є взаємно стаціонарними випадковими процесами, якщо виконуються рівності:

$$r_p^c(u) = r_p^s(u), r_q^c(u) = r_q^s(u), r_p^{cs}(-u) = -r_p^{cs}(u), r_q^{cs}(-u) = -r_q^{cs}(u), \quad (5.3.36)$$

$$r_{pq}^c(u) = r_{pq}^s(u), r_{pq}^{cs}(u) = -r_{pq}^{sc}(u). \quad (5.3.37)$$

а їх авто- і взаємо-кореляційні функції в цьому випадку задаються наступним чином:

$$R_c(u) = r_p^c(u) \cos v_0 u + r_p^{cs}(u) \sin v_0 u, \quad (5.3.38)$$

$$R_s(u) = r_q^c(u) \cos v_0 u + r_q^{cs}(u) \sin v_0 u, \quad (5.3.39)$$

$$R_{cs}(u) = r_{pq}^c(u) \cos v_0 u + r_{pq}^{cs}(\tau) \sin v_0 u. \quad (5.3.40)$$

Доведення.

Виходячи з (5.3.34) і (5.3.35) для автокореляційних функцій квадратур $\xi_c(t)$ і $\xi_s(t)$ маємо:

$$b_c(t, u) = \sum_{k=0, \pm 2} B_k^c(u) e^{ikv_0 t}, \quad (5.3.41)$$

$$b_s(t, u) = \sum_{k=0, \pm 2} B_k^s(u) e^{ikv_0 t}, \quad (5.3.42)$$

де

$$B_0^c(u) = \frac{1}{2} \left[[r_p^c(u) + r_p^s(u)] \cos v_0 u + [r_p^{cs}(u) - r_p^{sc}(u)] \sin v_0 u \right],$$

$$B_0^s(u) = \frac{1}{2} \left[[r_q^c(u) + r_q^s(u)] \cos v_0 u + [r_q^{cs}(u) - r_q^{sc}(u)] \sin v_0 u \right],$$

$$B_2^c(u) = \frac{1}{4} \left[[r_p^c(u) - r_p^s(u)] - i [r_p^{cs}(u) + r_p^{sc}(u)] \right] e^{v_0 u}, \quad (5.3.43)$$

$$B_2^s(u) = \frac{1}{4} \left[[r_q^c(u) - r_q^s(u)] - i [r_q^{cs}(u) + r_q^{sc}(u)] \right] e^{v_0 u}. \quad (5.3.44)$$

З (5.3.43) і (5.3.44) випливає, що другі кореляційні компоненти дорівнюють нулю, якщо виконуються рівності (5.3.36). Тоді автокореляційні функції (5.3.41) і (5.3.42) залежать тільки від величини затримки u і визначаються відповідно співвідношеннями (5.3.38) і (5.3.39).

Для взаємкореляційної функції (5.3.34) і (5.3.35) отримуємо:

$$b_{cs}(t, u) = \sum_{k=0, \pm 2} B_k^{cs}(u) e^{ikv_0 t}, \quad (5.3.45)$$

де

$$B_0^{cs}(u) = \frac{1}{2} \left[[r_{pq}^c(u) + r_{pq}^s(u)] \cos v_0 u + [r_{pq}^{cs}(u) - r_{pq}^{sc}(u)] \sin v_0 u \right],$$

$$B_2^{cs}(u) = \frac{1}{4} \left[r_{pq}^c(u) - r_{pq}^s(u) - i [r_{pq}^{cs}(u) + r_{pq}^{sc}(u)] \right] e^{iv_0 u}. \quad (5.3.46)$$

З (5.3.45) видно, що $B_2^{cs}(u) = 0$ за умови виконання рівностей (5.3.37). Отже, кореляційна функція (5.3.45) не залежить від часу і має вигляд (5.3.40).

Теорему доведено.

Враховуючи (5.3.38)–(5.3.40), ми можемо представити кореляційні компоненти (5.3.3)–(5.3.5) сигналу (5.3.1) співвідношеннями:

$$B_0^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} \left[[r_p^c(u) + r_q^c(u)] \cos v_0 u + [r_p^{cs}(u) + r_q^{sc}(u)] \sin v_0 u \right] \cos \omega_0 u +$$

$$+ [\tilde{r}_{pq}^c(u) \cos v_0 u + \tilde{r}_{pq}^{cs}(u) \sin v_0 u] \sin \omega_0 u, \quad (5.3.47)$$

$$B_2^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [r_p^c(u) - r_q^c(u)] \cos v_0 u + [r_p^{cs}(u) - r_q^{sc}(u)] \sin v_0 u \right] -$$

$$- i [\tilde{r}_{pq}^c(u) \cos v_0 u + \tilde{r}_{pq}^{cs}(u) \sin v_0 u] e^{i\omega_0 u}.$$

З (5.3.47) для односторонньої нульової спектральної складової отримуємо:

$$f_0^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{8} \sum_{l=\pm 1} \left[f_p^c(\omega - (v_0 + l\omega_0)) + f_q^c(\omega - (v_0 + l\omega_0)) + \right.$$

$$\left. + f_p^c(\omega + (v_0 + l\omega_0)) + f_q^c(\omega + (v_0 + l\omega_0)) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +2 \left[\tilde{f}_{pq}^c(\omega + (\omega_0 + l\nu_0)) - \tilde{f}_{pq}^c(\omega - (\omega_0 + l\nu_0)) + \right. \\
& \left. + \tilde{f}_{pq}^{cs}(\omega + l(\nu_0 - \omega_0)) - \tilde{f}_{pq}^{cs}(\omega + l(\nu_0 + \omega_0)) \right] + \\
& + \left[\tilde{f}_{pq}^{cs}(\omega - (\nu_0 + l\omega_0)) + \tilde{f}_q^{cs}(\omega - (\nu_0 + l\omega_0)) \right]. \tag{5.3.48}
\end{aligned}$$

Припустимо, що спектри квадратур $p_{c,s}(t)$ і $q_{c,s}(t)$ обмежені інтервалом $\left[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right]$. Тоді спектр (5.3.48) обмежується інтервалом $\left[\nu_0 - \frac{3}{2}\omega_0, \nu_0 + \frac{3}{2}\omega_0\right]$ і він має максимуми в точках $\omega = \nu_0 - \omega_0$ і $\omega = \nu_0 + \omega_0$. Виходячи з цього, ми можемо виділити з сигналу дві вузькосмугові компоненти:

$$\xi^+(t) = \mu_c(t) \cos(\nu_0 + \omega_0)t + \mu_s(t) \sin(\nu_0 + \omega_0)t, \tag{5.3.49}$$

$$\xi^-(t) = \nu_c(t) \cos(\nu_0 - \omega_0)t + \nu_s(t) \sin(\nu_0 - \omega_0)t, \tag{5.3.50}$$

де

$$\mu_c(t) = \frac{1}{2} [p_c(t) - q_s(t)], \quad \mu_s(t) = \frac{1}{2} [p_s(t) + q_c(t)], \tag{5.3.51}$$

$$\nu_c(t) = \frac{1}{2} [p_c(t) + q_s(t)], \quad \nu_s(t) = \frac{1}{2} [p_s(t) - q_c(t)]. \tag{5.3.52}$$

Нижче ми допускаємо, що $m_p^{c,s} = 0, m_q^{c,s} = 0$.

Теорема 5.3.5. *Компоненти сигналу (5.3.49) і (5.3.50) є стаціонарними випадковими процесами, і їх автокореляційні функції визначаються за формулами:*

$$\begin{aligned}
R_{\xi^+}(u) = & \frac{1}{4} \left[[r_p^c(u) + r_q^c(u) - 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u)] \cos(\nu_0 + \omega_0)u + \right. \\
& \left. + [r_p^{cs}(u) + r_q^{cs}(u) + 2\tilde{r}_{pq}^c(u)] \sin(\nu_0 + \omega_0)u \right], \tag{5.3.53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\xi^-}(u) = & \frac{1}{4} \left[[r_p^c(u) + r_q^s(u) + 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u)] \cos(\nu_0 - \omega_0)u + \right. \\
& \left. + [r_p^{cs}(u) + r_q^{cs}(u) - 2\tilde{r}_{pq}^c(u)] \sin(\nu_0 - \omega_0)u \right], \tag{5.3.54}
\end{aligned}$$

а сума величин (5.3.53) і (5.3.54) дорівнює нульовій кореляційній компоненті сигналу (5.3.1).

Доведення.

Випадкові процеси (5.3.49) і (5.3.50) є стаціонарними, якщо автокореляційні функції, $r_{\mu}^{c,s} = E\mu_{c,s}(t)\mu_{c,s}(t+u)$, $r_v^{c,s} = Ev_{c,s}(t)v_{c,s}(t+u)$ та взаємно кореляційні функції $r_{\mu}^{cs} = E\mu_c(t)\mu_s(t+u)$, $r_v^{cs} = Ev_c(t)v_s(t+u)$ задовольняють рівності:

$$r_{\mu}^c(u) = r_{\mu}^s(u), \quad r_{\mu}^{cs}(-u) = -r_{\mu}^{cs}(u), \quad (5.3.55)$$

$$r_v^c(u) = r_v^s(u), \quad r_v^{cs}(-u) = -r_v^{cs}(u). \quad (5.3.56)$$

У цьому випадку для кореляційних функцій (5.3.49) і (5.3.50) маємо:

$$R_{\xi^+}(u) = r_{\mu}^c(u)\cos(v_0 + \omega_0)u + r_{\mu}^{cs}(u)\sin(v_0 + \omega_0)u, \quad (5.3.57)$$

$$R_{\xi^-}(u) = r_v^c(u)\cos(v_0 - \omega_0)u + r_v^{cs}(u)\sin(v_0 - \omega_0)u. \quad (5.3.58)$$

Виходячи з (5.3.51), знаходимо:

$$r_{\mu}^c(u) = \frac{1}{4} [r_p^c(u) + r_q^s(u) - 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u)], \quad (5.3.59)$$

$$r_{\mu}^s(u) = \frac{1}{4} [r_p^s(u) + r_q^c(u) + 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u)], \quad (5.3.60)$$

$$r_{\mu}^{cs}(u) = \frac{1}{4} [r_p^{cs}(u) + r_{pq}^c(u) - r_{qp}^s(u) - r_q^{sc}(u)], \quad (5.3.61)$$

$$r_{\mu}^{sc}(u) = \frac{1}{4} [r_p^{sc}(u) - r_{pq}^s(u) + r_{qp}^c(u) - r_q^{cs}(u)]. \quad (5.3.62)$$

Беручи до уваги умови для взаємно стаціонарної модуляції (5.3.36) і (5.3.37), приходимо до висновку, що рівності (5.3.35) справедливі і:

$$r_{\mu}^{sc}(u) = \frac{1}{4} [r_p^{cs}(u) + r_q^{cs}(u) + 2\tilde{r}_{pq}^c(u)], \quad (5.3.63)$$

де $\tilde{r}_{pq}^c(u)$ – непарна частина функції взаємної кореляції $r_{pq}^c(u)$.

Підставляючи (5.3.59) і (5.3.63) в (5.3.58), отримуємо вираз (5.3.53). З (5.3.52) отримуємо:

$$r_v^c(u) = \frac{1}{4} [r_p^c(u) + r_q^s(u) + 2r_{pq}^{cs}(u)], \quad (5.3.64)$$

$$r_v^s(u) = \frac{1}{4} [r_p^s(u) + r_q^c(u) - 2r_{pq}^{sc}(u)], \quad (5.3.65)$$

$$r_v^{cs}(u) = \frac{1}{4} [r_p^{cs}(u) - r_q^{sc}(u) + r_{qp}^s(u) - r_{pq}^c(u)], \quad (5.3.66)$$

$$r_v^{sc}(u) = \frac{1}{4} [r_p^{sc}(u) + r_{pq}^s(u) - r_{qp}^c(u) - r_q^{cs}(u)]. \quad (5.3.67)$$

Використовуючи (5.3.66) і (5.3.37), приходимо до рівностей (5.3.56), а також

$$r_v^{cs}(u) = \frac{1}{4} [r_p^{cs}(u) + r_q^{cs}(u) - 2\tilde{r}_{pq}^c(u)]. \quad (5.3.68)$$

Після підстановки (5.3.64) і (5.3.68) в (5.3.58) отримуємо вираз (5.3.54).

Додаючи (5.3.53) і (5.3.54) отримаємо (5.3.47) $R_{\xi^+}(u) + R_{\xi^-}(u) = B_0^{(\xi)}(u)$.

Теорему доведено.

Теорема 5.3.6. *Стаціонарні компоненти сигналу (5.3.49) і (5.3.50) є взаємно ПНВС, а функції їх взаємної кореляції задаються:*

$$R_{\xi^+ \xi^-}(t, u) = \frac{1}{4} \left[[r_p^c(u) - r_q^s(u) + 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u)] \cos(2\omega_0 t - (v_0 - \omega_0)u) - [r_p^{cs}(u) - r_q^{cs}(u) - 2\tilde{r}_{pq}^c(u)] \sin(2\omega_0 t - (v_0 - \omega_0)u) \right]. \quad (5.3.69)$$

$$R_{\xi^- \xi^+}(t, u) = \frac{1}{4} \left[[r_p^c(u) - r_q^s(u) - 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u)] \cos(2\omega_0 t + (v_0 + \omega_0)u) + [r_p^{cs}(u) - r_q^{cs}(u) + 2\tilde{r}_{pq}^c(u)] \sin(2\omega_0 t + (v_0 + \omega_0)u) \right], \quad (5.3.70)$$

а сума величин (5.3.69) і (5.3.70) визначає другу гармоніку кореляційної функції (5.3.2).

Доведення.

Для простоти виведення формул перепишемо (5.3.49) і (5.3.50) у комплексній формі:

$$\begin{aligned}\xi^+(t) &= \mu(t)e^{i(v_0+\omega_0)t} + \bar{\mu}(t)e^{-i(v_0+\omega_0)t}, \\ \xi^-(t) &= v(t)e^{i(v_0-\omega_0)t} + \bar{v}(t)e^{-i(v_0-\omega_0)t},\end{aligned}$$

де

$$\mu(t) = \frac{1}{2}[\mu_c(t) - i\mu_s(t)], \quad v(t) = \frac{1}{2}[v_c(t) - iv_s(t)]. \quad (5.3.71)$$

Тоді

$$R_{\xi^+\xi^-}(t, u) = 2\operatorname{Re}\left\{r_{\bar{\mu}v}(u)e^{-i2\omega_0t}e^{i(v_0-\omega_0)u} + r_{\mu v}(u)e^{i2v_0t}e^{i(v_0-\omega_0)u}\right\}, \quad (5.3.72)$$

$$R_{\xi^-\xi^+}(t, u) = 2\operatorname{Re}\left\{r_{\bar{v}\mu}(u)e^{i2\omega_0t}e^{i(v_0+\omega_0)u} + r_{v\mu}(u)e^{i2v_0t}e^{i(v_0+\omega_0)u}\right\}. \quad (5.3.73)$$

де $r_{\bar{\mu}v}(u) = E\bar{\mu}(t)v(t+u)$, $r_{\mu v}(u) = E\mu(t)v(t+u)$. Виходячи з (5.3.71) і (5.3.51), (5.3.52) отримуємо (див. Додаток Л):

$$r_{\bar{\mu}v}(u) = \frac{1}{8}\left[r_p^c(u) - r_q^c(u) + 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u) - i\left[r_p^{cs}(u) - r_q^{cs}(u) - 2\tilde{r}_{pq}^c(u)\right]\right], \quad (5.3.74)$$

$$r_{\bar{v}\mu}(u) = \frac{1}{8}\left[r_p^c(u) - r_q^c(u) - 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u) - i\left[r_p^{cs}(u) - r_q^{cs}(u) + 2\tilde{r}_{pq}^c(u)\right]\right], \quad (5.3.75)$$

$$r_{\mu v}(u) = r_{v\mu}(u) = 0. \quad (5.3.76)$$

Підставляючи співвідношення (5.3.74)–(5.3.76) у (5.3.72) та (5.3.73), приходимо до формул (5.3.69) та (5.3.70).

Сума (3.69) і (3.70) дорівнює:

$$R_{\xi^+\xi^-}(t, u) + R_{\xi^-\xi^+}(t, u) = B_{-2}^{(\xi)}(u)e^{-i2\omega_0t} + B_2^{(\xi)}(u)e^{i2\omega_0t},$$

де $B_2^{(\xi)}(u) = \bar{B}_{-2}^{(\xi)}(u)$ – друга кореляційна компонента сигналу, що визначається за формулою (5.3.32). **Теорему доведено.**

Перетворення Гільберта сигналу (5.3.1) для вузькосмугового випадку дорівнює:

$$\eta(t) = [p_c(t)\sin v_0 t - p_s(t)\cos v_0 t] \cos \omega_0 t + [q_c(t)\sin v_0 t - q_s(t)\cos v_0 t] \sin \omega_0 t.$$

Ми можемо представити цей вираз як суму двох компонентів:

$$\eta(t) = \eta^+(t) + \eta^-(t),$$

де

$$\eta^+(t) = H\{\xi^+(t)\} = \mu_c(t)\sin(v_0 + \omega_0)t - \mu_s(t)\cos(v_0 + \omega_0)t, \quad (5.3.77)$$

$$\eta^-(t) = H\{\xi^-(t)\} = \nu_c(t)\sin(v_0 - \omega_0)t - \nu_s(t)\cos(v_0 - \omega_0)t. \quad (5.3.78)$$

Тоді для аналітичного сигналу маємо:

$$\zeta(t) = \xi^+(t) + \xi^-(t) + i[\eta^+(t) + \eta^-(t)] = \mu(t)e^{i(v_0 + \omega_0)t} + \nu(t)e^{i(v_0 - \omega_0)t}. \quad (5.3.79)$$

Теорема 5.3.5. Аналітичний сигнал (5.3.79) є комплексним ПНВС, кореляційна функція якого визначається виразом:

$$b_\zeta(t, u) = \sum_{k=0, \pm 2} B_k^{(\zeta)}(u) e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$B_0^{(\zeta)}(u) = \left[[r_p^c(u) + r_q^c(u)] \cos \omega_0 u + 2\tilde{r}_{pq}^c(u) \sin \omega_0 u - \right. \\ \left. - i \left[[r_p^{cs}(u) + r_q^{cs}(u)] \cos \omega_0 u + 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u) \sin \omega_0 u \right] e^{iv_0 u} \right], \quad (5.3.80)$$

$$B_2^{(\zeta)}(u) = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} r_p^c(u) - r_q^c(u) - 2\tilde{r}_{pq}^c(u) \sin \omega_0 \tau - \\ - i \left[r_p^{cs}(u) - r_q^{cs}(u) + 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u) \right] e^{i(v_0 + \omega_0)u} \end{array} \right]. \quad (5.3.81)$$

Доведення.

Виходячи з (5.3.79), отримуємо:

$$b_\zeta(t, u) = 4 \left[[r_\mu(u) e^{i\omega_0 u} + r_\nu(u) e^{-i\omega_0 u}] e^{iv_0 u} + e^{-i2\omega_0 t} r_{\mu\nu}(u) e^{i(v_0 - \omega_0)u} + e^{i2\omega_0 t} r_{\bar{\nu}\mu}(u) e^{i(v_0 + \omega_0)u} \right].$$

Отже

$$B_0^{(\zeta)}(u) = 4 \left[r_\mu(u) e^{i\omega_0 u} + r_\nu(u) e^{-i\omega_0 u} \right] e^{iv_0 u}, \quad (5.3.82)$$

$$B_2^{(\zeta)}(u) = 4r_{\bar{\nu}\mu}(u)e^{i(\nu_0+\omega_0)u}. \quad (5.3.83)$$

Для автокореляційних функцій модулюючих процесів $\mu(t)$ і $\nu(t)$ маємо:

$$r_\mu(u) = \frac{1}{4} \left[r_\mu^c(u) + r_\mu^s(u) - i \left[r_\mu^{cs}(u) - r_\mu^{sc}(u) \right] \right], \quad (5.3.84)$$

$$r_\nu(u) = \frac{1}{4} \left[r_\nu^c(u) + r_\nu^s(u) - i \left[r_\nu^{cs}(u) - r_\nu^{sc}(u) \right] \right]. \quad (5.3.85)$$

Підставляємо отримані вирази для (5.3.84) та (5.3.85) у (5.3.82), враховуючи співвідношення (5.3.59)–(5.3.62) та (5.3.64)–(5.3.67). Після нескладних перетворень приходимо до (5.3.80).

Взаємно кореляційні функції $\nu(t)$ і $\mu(t)$ визначаються (5.3.75). Тоді з (5.3.83) отримуємо (5.3.81). **Теорему доведено.**

Дисперсія $b_\zeta(t,0)$ (яка дорівнює подвоєній дисперсії сигналу $\xi(t)$), має вид:

$$b_\zeta(t,0) = B_0^{(\zeta)}(0) + C_2^{(\zeta)}(0)\cos 2\omega_0 t + S_2^{(\zeta)}(0)\sin 2\omega_0 t,$$

де

$$B_0^{(\zeta)}(0) = 4 \left[r_\mu(0) + r_\nu(0) \right] = r_p^c(0) + r_q^c(0),$$

$$C_2^{(\zeta)}(0) = r_p^c(0) - r_q^c(0), \quad S_2^{(\zeta)}(0) = 2r_{pq}^c(0).$$

Оскільки $2r_{pq}^c(0) \leq \sqrt{r_p^c(0)r_q^c(0)}$, то амплітуда другої гармоніки

$2|B_2^{(\zeta)}(0)| = 8|r_{\mu\nu}(0)| = \left[\left[r_p^c(0) - r_q^c(0) \right]^2 + 4 \left[r_{pq}^c(0) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ є завжди меншою за

усередню в часі величину дисперсії $B_0^{(\zeta)}(0)$

З наведеного вище випливає, що дисперсія аналітичного сигналу визначається дисперсіями квадратур для компонент (5.3.34) і (5.3.35), а також величиною їх взаємно кореляційної функції в точці $u=0$. Ці квадратури можна легко отримати з (5.3.49), (5.3.50) і (5.3.77), (5.3.78):

$$\mu_c(t) = \xi^+(t) \cos(v_0 + \omega_0)t + \eta^+(t) \sin(v_0 + \omega_0)t,$$

$$\mu_s(t) = \xi^+(t) \sin(v_0 + \omega_0)t - \eta^+(t) \cos(v_0 + \omega_0)t,$$

$$v_c(t) = \xi^-(t) \cos(v_0 - \omega_0)t + \eta^-(t) \sin(v_0 - \omega_0)t,$$

$$v_s(t) = \xi^-(t) \sin(v_0 - \omega_0)t - \eta^-(t) \cos(v_0 - \omega_0)t.$$

Беручи до уваги (5.3.51) і (5.3.52), маємо:

$$p_c(t) = \mu_c(t) + v_c(t),$$

$$p_s(t) = \mu_s(t) + v_s(t),$$

$$q_c(t) = \mu_s(t) - v_s(t),$$

$$q_s(t) = v_c(t) - \mu_c(t).$$

Отриманий вираз можна використовувати для виділення квадратур, коли ми маємо справу з обробкою реальних даних. Аналіз кореляційної та спектральної структури квадратур дозволяє встановити особливості амплітудної та фазової модуляції для кожного конкретного випадку.

5.3.3. Широкосмугова високочастотна модуляція багатокomпонентного сигналу.

Будемо аналізувати сигнал, який представлений скінченим рядом:

$$\xi(t) = \sum_{k=-L}^L \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} = \xi_0(t) + \sum_{k=1}^L [\xi_k^c(t) \cos k\omega_0 t + \xi_k^s(t) \sin k\omega_0 t], \quad (5.3.86)$$

де $\xi_0(t)$ і $\xi_k(t) = \frac{1}{2} [\xi_k^c(t) - i\xi_k^s(t)]$ є взаємно стаціонарними випадковими процесами. Кореляційна функція (5.3.86) дорівнює:

$$b_\xi(t, u) = \sum_{k, l=-L}^L R_{kl}^{(\xi)}(u) e^{i(l-k)\omega_0 t} e^{il\omega_0 u} = \sum_{r=-2L}^{2L} B_r^{(\xi)}(u) e^{ir\omega_0 t}, \quad (5.3.87)$$

де

$$B_r^{(\xi)}(u) = \sum_{l \in M} R_{l-r,l}^{(\xi)}(u) e^{il\omega_0 u}, \quad (5.3.88)$$

при цьому $R_{kl}^{(\xi)}(u) = E \bar{\xi}_k(t) \xi_l(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}_k(t) = \xi_k(t) - m_k$, $m_k = E \xi_k(t)$,
 $M = \{-L, \dots, k+L\}$ для $r \leq 0$ і $M = \{r-L, \dots, L\}$ для $r > 0$. Взаємно кореляційні
 функції визначаються співвідношенням:

$$R_{kl}^{(\xi)}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{\xi_k \xi_l}^c(u) + R_{\xi_k \xi_l}^s(u) - i \left[R_{\xi_k \xi_l}^{cs}(u) - R_{\xi_k \xi_l}^{sc}(u) \right] \right], \quad (5.3.89)$$

де

$$R_{\xi_k \xi_l}^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t) \overset{\circ}{\xi}_l^{c,s}(t+u),$$

$$R_{\xi_k \xi_l}^{cs}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k^c(t) \overset{\circ}{\xi}_l^s(t+u),$$

$$\overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t) = \xi_k^{c,s}(t) - m_k^{c,s}, \quad m_k^{c,s} = E \xi_k^{c,s}(t).$$

Надалі вважаємо що $m_k^{c,s} = 0$. Припустимо, що спектральні густини потужності
 модулюючих процесів

$$f_{kk}^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{kk}^{(\xi)}(u) e^{i\omega u} du$$

є обмежені інтервалом $[v_0 - \omega_m, v_0 + \omega_m]$, $v_0 - \omega_m > L\omega_0$. Тоді для перетворення
 Гільберта від (5.3.86) маємо:

$$\eta(t) = H[\xi(t)] = \eta_0(t) + \sum_{k=1}^L [\eta_k^c(t) \cos k\omega_0 t + \eta_k^s(t) \sin k\omega_0 t], \quad (5.3.90)$$

де

$$\eta_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \xi_0(\tau) d\tau,$$

$$\eta_k^c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \xi_k^c(\tau) d\tau, \quad \eta_k^s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \xi_k^s(\tau) d\tau. \quad (5.3.91)$$

Вводимо комплексні взаємно стаціонарні випадкові процеси:

$$\eta_k(t) = \frac{1}{2} [\eta_k^c(t) - i\eta_k^s(t)]$$

і переписуємо стохастичний ряд (5.3.90) у вигляді:

$$\eta(t) = \sum_{k=-L}^L \eta_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad (5.3.92)$$

де $\eta_{-k}(t) = \bar{\eta}_k(t)$. З (5.3.92) отримуємо:

$$b_\eta(t, u) = \sum_{r=-2L}^{2L} B_r^{(\eta)}(u) e^{ir\omega_0 t}, \quad (5.3.93)$$

де

$$B_r^{(\eta)}(u) = \frac{1}{4} \sum_{l \in M} \left[R_{\eta_l - r \eta_l}^c(u) + R_{\eta_l - r \eta_l}^s(u) - i \left[R_{\eta_l - r \eta_l}^{cs}(u) - R_{\eta_l - r \eta_l}^{sc}(u) \right] \right] e^{il\omega_0 u}. \quad (5.3.94)$$

Виходячи з (5.3.86) і (5.3.92) для взаємних кореляційних функцій сигналу та його перетворення Гільберта отримуємо такі представлення:

$$b_{\xi\eta}(t, u) = \sum_{r=-2L}^{2L} B_r^{(\xi\eta)}(u) e^{ir\omega_0 t}, \quad (5.3.95)$$

$$b_{\eta\xi}(t, u) = \sum_{r=-2L}^{2L} B_r^{(\eta\xi)}(u) e^{ir\omega_0 t}, \quad (5.3.96)$$

де

$$B_r^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{4} \sum_{l \in M} \left[R_{\xi_l - r \eta_l}^c(u) + R_{\xi_l - r \eta_l}^s(u) - i \left[R_{\xi_l - r \eta_l}^{cs}(u) - R_{\xi_l - r \eta_l}^{sc}(u) \right] \right] e^{il\omega_0 u}, \quad (5.3.97)$$

$$B_r^{(\eta\xi)}(u) = \frac{1}{4} \sum_{l \in M} \left[R_{\eta_l - r \xi_l}^c(u) + R_{\eta_l - r \xi_l}^s(u) - i \left[R_{\eta_l - r \xi_l}^{cs}(u) - R_{\eta_l - r \xi_l}^{sc}(u) \right] \right] e^{il\omega_0 u}. \quad (5.3.98)$$

Теорема 5.3.8. Автокореляційні функції сигналу (5.3.86) і його перетворення Гільберта (5.3.92) однакові, а їхні взаємо кореляційні функції (5.3.95) і (5.3.96) відрізняються лише знаком, нульові взаємо кореляційні компоненти є непарними функціями часової затримки та визначаються виразом:

$$B_r^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[f_{\xi_0}(\omega) \sin \omega u + \right. \\ \left. + 2 \sum_{l=1}^L \left[\left[f_{\xi_l}^c(\omega) + f_{\xi_l}^s(\omega) \right] \sin \omega u \cos l \omega_0 u - 2 \tilde{f}_{\xi_l}^{cs}(\omega) \cos \omega u \sin l \omega_0 u \right] \right] d\omega, \quad (5.3.99)$$

де

$$f_{\xi_0}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_{\xi_0}(u) \cos \omega u du,$$

$$f_{\xi_l}^{c,s}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_{\xi_l}^{c,s}(u) \cos \omega u du,$$

$$\tilde{f}_{\xi_l}^{cs}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{R}_{\xi_l}^{cs}(u) \sin \omega u du.$$

Доведення.

Для знаходження співвідношень, які зв'язують взаємо кореляційні функції модулюючих процесів $\eta_l(t)$ і $\xi_k(t)$, котрі визначають взаємо кореляційні компоненти сигналу (5.3.86) та його перетворення Гільберта (5.3.92), а також взаємо кореляційні компоненти (5.3.97) і (5.3.98), використаємо рівняння (5.3.91) і вираз для зворотнього перетворення Гільберта:

$$\xi_0(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \eta_0(\tau) d\tau,$$

$$\xi_k^c(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \eta_k^c(\tau) d\tau, \quad \xi_k^s(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \eta_k^s(\tau) d\tau. \quad (5.3.100)$$

Спершу порівняємо вирази (5.3.87) і (5.3.88) та (5.3.93) і (5.3.94). З (5.3.91) для взаємних спектральних густин маємо:

$$f_{\eta_k \eta_l}^{c,s}(\omega) = -H(\omega) f_{\xi_k \eta_l}^{c,s}(\omega),$$

$$f_{\eta_l \xi_k}^{c,s}(\omega) = -H(\omega) f_{\xi_l \xi_k}^{c,s}(\omega).$$

Враховуючи рівність $f_{\xi_k \eta_l}^{c,s}(\omega) = \bar{f}_{\eta_l \xi_k}^{c,s}(\omega)$, отримуємо:

$$f_{\eta_k \eta_l}^{c,s}(\omega) = H(\omega) \bar{H}(\omega) \bar{f}_{\xi_k \xi_l}^{c,s}(\omega) = f_{\xi_k \xi_l}^{c,s}(\omega),$$

і $R_{\eta_k \eta_l}^{c,s}(u) = R_{\xi_k \xi_l}^{c,s}(u)$. Аналогічно отримуємо:

$$f_{\eta_k \eta_l}^{cs}(\omega) = -H(\omega) f_{\xi_k \eta_l}^{cs}(\omega),$$

$$f_{\eta_k \xi_k}^{cs}(\omega) = -H(\omega) f_{\xi_k \eta_k}^{cs}(\omega).$$

Отже

$$f_{\eta_k \eta_l}^{cs}(\omega) = H(\omega) \bar{H}(\omega) \bar{f}_{\xi_l \xi_k}^{sc}(\omega) = f_{\xi_k \xi_l}^{cs}(\omega).$$

Оскільки $f_{\eta_k \eta_l}^{sc}(\omega) = \bar{f}_{\eta_k \eta_l}^{cs}(\omega)$ і $f_{\xi_k \xi_l}^{sc}(\omega) = \bar{f}_{\xi_k \xi_l}^{cs}(\omega)$, тоді $f_{\eta_k \eta_l}^{sc}(\omega) = f_{\xi_k \xi_l}^{sc}(\omega)$.

Отримані вище рівності дозволяють стверджувати, що $B_r^{(\eta)}(u) = B_r^{(\xi)}(u)$ і $b_{\eta}(t, u) = b_{\xi}(t, u)$.

Виразимо взаємну кореляційну функцію сигналу та квадратури його перетворення Гільберта в термінах взаємно кореляційних функцій квадратур сигналу. Використовуючи (5.3.91) і (5.3.100), отримуємо:

$$f_{\eta_k \xi_l}^{c,s}(\omega) = -H(\omega) f_{\xi_k \xi_l}^{c,s}(\omega),$$

$$f_{\xi_k \eta_l}^{c,s}(\omega) = H(\omega) f_{\eta_k \eta_l}^{c,s}(\omega).$$

Оскільки $f_{\eta_k \eta_l}^{c,s}(\omega) = f_{\xi_k \xi_l}^{c,s}(\omega)$, тоді $f_{\eta_k \xi_l}^{c,s}(\omega) = -f_{\xi_k \xi_l}^{c,s}(\omega)$ і $R_{\eta_k \xi_l}^{c,s}(u) = -R_{\xi_k \eta_l}^{c,s}(u)$.

З (5.3.91) і (5.3.100) також випливає, що:

$$f_{\xi_k \eta_l}^{cs}(\omega) = H(\omega) f_{\eta_k \eta_l}^{cs}(\omega),$$

$$f_{\eta_k \xi_l}^{cs}(\omega) = -H(\omega) f_{\xi_k \xi_l}^{cs}(\omega).$$

Враховуючи рівність $f_{\eta_k \eta_l}^{cs}(\omega) = f_{\xi_k \xi_l}^{cs}(\omega)$ ми приходимо до $f_{\xi_k \eta_l}^{cs}(\omega) = -f_{\eta_k \xi_l}^{cs}(\omega)$ і $R_{\xi_k \eta_l}^{cs}(u) = -R_{\xi_k \eta_l}^{cs}(u)$.

Оскільки $R_{\xi_k \eta_l}^{cs}(u) = R_{\eta_l \xi_k}^{sc}(-u)$ і $R_{\eta_k \xi_l}^{cs}(u) = R_{\xi_l \eta_k}^{sc}(-u)$, то також і $R_{\eta_k \xi_l}^{sc}(u) = -R_{\xi_k \eta_l}^{sc}(u)$.

З наведених вище рівнянь отримуємо $B_r^{(\eta \xi)}(u) = -B_r^{(\xi \eta)}(u)$ і $b_{\eta \xi}(t, u) = -b_{\xi \eta}(t, u)$.

Нульова компонента взаємної кореляції має вираз:

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = R_{\xi_0\eta_0}(u) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \left[\left[R_{\xi_l\eta_l}^c(u) + R_{\xi_l\eta_l}^c(u) \right] \cos l\omega_0 u + \left[R_{\xi_l\eta_l}^{cs}(u) - R_{\xi_l\eta_l}^{sc}(u) \right] \sin l\omega_0 u \right].$$

Після підстановки в цей вираз залежностей

$$R_{\xi_0\eta_0}(u) = 2 \int_0^{\infty} f_{\xi_0}(\omega) \sin \omega u d\omega,$$

$$R_{\xi_l\eta_l}^{c,s}(u) = 2 \int_0^{\infty} f_{\xi_l}^{c,s}(\omega) \sin \omega u d\omega,$$

$$R_{\xi_l\eta_l}^{cs}(u) = -R_{\eta_l\xi_l}^{sc}(u) = -2 \int_0^{\infty} \tilde{f}_{\xi_l}^{cs}(\omega) \cos \omega u d\omega.$$

приходимо до формули (5.3.99). Як бачимо $B_0^{(\xi\eta)}(-u) = -B_0^{(\xi\eta)}(u)$. **Теорему доведено.**

Кореляційна функція аналітичного сигналу $b_\zeta(t, u) = 2 \left[b_\xi(t, u) + i b_{\xi\eta}(t, u) \right]$

визначається рядом:

$$b_\zeta(t, u) = 2 \sum_{r=-2L}^{2L} \left[B_r^{(\xi)}(u) + i B_r^{(\xi\eta)}(u) \right] e^{ir\omega_0 t}.$$

Враховуючи, що $B_r^{(\xi\eta)}(u) = -B_r^{(\eta\xi)}(u)$, отже $B_r^{(\xi\eta)}(0) = 0$. Для дисперсії $b_\zeta(t, 0)$

маємо:

$$b_\zeta(t, 0) = B_0^{(\zeta)}(0) + \sum_{r=1}^{2L} \left[C_r^{(\zeta)}(0) \cos r\omega_0 t + S_r^{(\zeta)}(0) \sin r\omega_0 t \right],$$

де

$$B_0^{(\zeta)}(0) = 2 \sum_{l=-L}^L R_{\xi_l}^{(\xi)}(0) = 2R_{\xi_0}(0) + \sum_{l=1}^L \left[R_{\xi_l}^c(0) + R_{\xi_l}^s(0) \right],$$

$$C_r^{(\zeta)}(0) = \sum_{l=-L+r}^L \left[R_{\xi_l-r\xi_l}^c(0) + R_{\xi_l-r\xi_l}^s(0) \right],$$

$$S_r^{(\zeta)}(0) = \sum_{l=-L+r}^L \left[R_{\xi_l-r\xi_l}^{cs}(0) + R_{\xi_l-r\xi_l}^{sc}(0) \right].$$

З рівняння

$$B_r^{(\xi)}(0) = \frac{1}{P} \int_0^P b_\xi(t, 0) e^{-ir\omega_0 t} dt$$

маємо

$$|B_r^{(\xi)}(0)| \leq \frac{1}{P} \int_0^P b_\xi(t, 0) dt = B_0^{(\xi)}(0).$$

Таким чином, амплітуди кожної гармоніки дисперсії, які визначаються взаємними кореляціями квадратур, є менші за потужність стаціонарного фону. Ми можемо представити цю потужність та амплітуди гармонік дисперсій у термінах спектральних характеристик сигналу. Потужність стаціонарного фону визначається сумою спектральних густин потужності квадратур:

$$B_0^{(\xi)}(0) = \int_{\nu_0 - \omega_m - L\omega_0}^{\nu_0 + \omega_m + L\omega_0} \left[2f_{\xi_0}(\omega) + \sum_{l=1}^L [f_{\xi_l}^c(\omega) + f_{\xi_l}^s(\omega)] \right] d\omega.$$

Для амплітуд гармонік дисперсії маємо:

$$2|B_r^{(\xi)}(0)| = 2 \int_{\nu_0 - \omega_m - L\omega_0}^{\nu_0 + \omega_m + L\omega_0} \left[[\operatorname{Re} f_r^{(\xi)}(\omega)]^2 + [\operatorname{Im} f_r^{(\xi)}(\omega)]^2 \right] d\omega,$$

де

$$\operatorname{Re} f_r^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [C_r^{(\xi)}(u) \cos \omega u - S_r^{(\xi)}(u) \sin \omega u] du,$$

$$\operatorname{Im} f_r^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [C_r^{(\xi)}(u) \sin \omega u - S_r^{(\xi)}(u) \cos \omega u] du,$$

і

$$C_r^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} \sum_{l \in M} \left[[R_{l-r,l}^c(u) + R_{l-r,l}^s(u)] \cos \omega_0 u + [R_{l-r,l}^{cs}(u) - R_{l-r,l}^{sc}(u)] \sin \omega_0 u \right],$$

$$S_r^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} \sum_{l \in M} \left[[R_{l-r,l}^c(u) + R_{l-r,l}^s(u)] \sin \omega_0 u - [R_{l-r,l}^{cs}(u) - R_{l-r,l}^{sc}(u)] \cos \omega_0 u \right].$$

Коли необроблений сигнал фільтрується фільтром з передаточною функцією (5.1.21) і $[\omega_1, \omega_2] \subset [\nu_0 - \omega_m - L\omega_0, \nu_0 + \omega_m + L\omega_0]$, зменшується потужність

стаціонарного фону. Величини амплітуд гармонік дисперсії зменшуються, якщо корельовані компоненти спектру сигналу не потрапляють в смугу пропускання фільтра.

$$2B_r^{(\xi)}(0) = \int_{\omega_1+r\omega_0}^{\omega_2} \left[\left[\operatorname{Re} f_r^{(\xi)}(\omega) + \operatorname{Re} f_r^{(\xi)}(\omega+r\omega_0) \right]^2 + \left[\operatorname{Im} f_r^{(\xi)}(\omega) + \operatorname{Im} f_r^{(\xi)}(\omega+r\omega_0) \right]^2 \right] d\omega, \quad (5.3.101)$$

Зауважимо, що смуга частот, яка визначає амплітуди гармонік (5.3.101), стає вужчою зі збільшенням номера гармоніки, а амплітуди гармонік з номерами r , для яких виконується нерівність $\omega_1 + r\omega_0 \geq \omega_2$, дорівнюють нулю.

5.3.4. Вузькосмугова модуляція багатокomпонентного сигналу.

Тепер ми припустимо, що високочастотна модуляція є заємної уговою і представимо кожен модулюючий процес в (5.3.26) формулами Райса:

$$\xi_0(t) = p_0^c(t) \cos \nu_0 t + p_0^s(t) \sin \nu_0 t, \quad (5.3.102)$$

$$\xi_k^c(t) = p_k^c(t) \cos \nu_0 t + p_k^s(t) \sin \nu_0 t, \quad (5.3.103)$$

$$\xi_k^s(t) = q_k^c(t) \cos \nu_0 t + q_k^s(t) \sin \nu_0 t. \quad (5.3.104)$$

Теорема 5.3.9. *Випадкові процеси (5.3.102)–(5.3.104) є взаємно стаціонарними, якщо авто- та взаємо кореляційні функції їхніх квадратур задовольняють рівності:*

$$R_{p_k p_l}^c(u) - R_{p_k p_l}^s(u) = 0, \quad R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{p_k p_l}^{sc}(u) = 0, \quad (5.3.105)$$

$$R_{q_k q_l}^c(u) - R_{q_k q_l}^s(u) = 0, \quad R_{q_k q_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{sc}(u) = 0, \quad (5.3.106)$$

$$R_{p_k q_l}^c(u) - R_{p_k q_l}^s(u) = 0, \quad R_{p_k q_l}^{cs}(u) + R_{p_k q_l}^{sc}(u) = 0 \quad (5.3.107)$$

Тоді авто- та взаємні кореляційні функції (5.3.102)–(5.3.104) визначаються як:

$$R_{kl}^c(u) = \frac{1}{2} \left[R_{p_k p_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^s(u) \right] \cos \nu_0 u + \frac{1}{2} \left[R_{p_k p_l}^{cs}(u) - R_{p_k p_l}^{sc}(u) \right] \sin \nu_0 u, \quad (5.3.108)$$

$$R_{kl}^s(u) = \frac{1}{2} [R_{q_k q_l}^c(u) + R_{q_k q_l}^s(u)] \cos v_0 u + \frac{1}{2} [R_{q_k q_l}^{cs}(u) - R_{q_k q_l}^{sc}(u)] \sin v_0 u, \quad (5.3.109)$$

$$R_{kl}^{cs}(u) = \frac{1}{2} [R_{p_k p_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^s(u)] \cos v_0 u + \frac{1}{2} [R_{p_k p_l}^{cs}(u) - R_{p_k p_l}^{sc}(u)] \sin v_0 u. \quad (5.3.110)$$

Доведення.

Виходячи з (5.3.103) отримуємо:

$$\begin{aligned} R_{kl}^c(t, u) = & \frac{1}{2} [R_{p_k p_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^s(u)] \cos v_0 u + \frac{1}{2} [R_{p_k p_l}^{cs}(u) - R_{p_k p_l}^{sc}(u)] \sin v_0 u + \\ & + \frac{1}{2} [[R_{p_k p_l}^c(u) - R_{p_k p_l}^s(u)] \cos v_0 u + [R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{p_k p_l}^{sc}(u)] \sin \mu_0 u] \cos 2v_0 t + \\ & + \frac{1}{2} [[R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{p_k p_l}^{sc}(u)] \cos v_0 u + [R_{p_k p_l}^s(u) - R_{p_k p_l}^c(u)] \sin \mu_0 u] \sin 2v_0 t \end{aligned}$$

Компоненти, що залежать від часу, рівні нулю, якщо виконуються рівності (5.3.105). Кореляційна функція (5.3.103) визначається (5.3.108).

Обчислюючи кореляційну функцію (5.3.104), приходимо до умов її стаціонарності, що виражаються рівностями (5.3.106). У цьому випадку отримуємо формулу (5.3.109).

Взаємкореляційна функція (5.3.103 і 5.3.104) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} R_{kl}^{cs}(t, u) = & \frac{1}{2} [[R_{p_k q_l}^c(u) + R_{p_k q_l}^s(u)] \cos v_0 u + [R_{p_k q_l}^{cs}(u) - R_{p_k q_l}^{sc}(u)] \sin v_0 u + \\ & + [[R_{p_k q_l}^c(u) - R_{p_k q_l}^s(u)] \cos v_0 u + [R_{p_k q_l}^{cs}(u) + R_{p_k q_l}^{sc}(u)] \sin \mu_0 u] \cos 2v_0 t + \\ & + [[R_{p_k q_l}^{cs}(u) + R_{p_k q_l}^{sc}(u)] \cos v_0 u + [R_{p_k q_l}^s(u) - R_{p_k q_l}^c(u)] \sin \mu_0 u] \sin 2v_0 t]. \end{aligned}$$

Звідси випливає висновок, що рівності (5.3.105)–(5.3.107) є умовами 208 взаємної стаціонарності (5.3.103) та (5.3.104). І їхня взаємкореляційна функція тоді визначається рівнянням (5.3.110). **Теорема доведена.**

Кожну складову у (5.3.86) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} \xi_k^c(t) \cos k\omega_0 t + \xi_k^s(t) \sin k\omega_0 t = & \mu_k^c(t) \cos(v_0 + k\omega_0)t + \mu_k^s(t) \sin(v_0 + k\omega_0)t + \\ & + \nu_k^c(t) \cos(v_0 - k\omega_0)t + \nu_k^s(t) \sin(v_0 - k\omega_0)t, \end{aligned}$$

де

$$\mu_k^c(t) = \frac{1}{2}[p_k^c(t) - q_k^s(t)], \quad \mu_k^s(t) = \frac{1}{2}[p_k^s(t) + q_k^c(t)], \quad (5.3.111)$$

$$v_k^c(t) = \frac{1}{2}[p_k^c(t) + q_k^s(t)], \quad v_k^s(t) = \frac{1}{2}[p_k^s(t) - q_k^c(t)]. \quad (5.3.112)$$

Вводячи комплексні випадкові процеси

$$\mu_k(t) = \frac{1}{2}[\mu_k^c(t) - i\mu_k^s(t)], \quad \mu_{-k}(t) = \bar{\mu}_k(t),$$

$$v_k(t) = \frac{1}{2}[v_k^c(t) - iv_k^s(t)], \quad v_{-k}(t) = \bar{v}_k(t),$$

для представлення сигналу маємо:

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \sum_{k=1}^L [\xi_k^+(t) + \xi_k^-(t)],$$

де

$$\xi_k^+(t) = \mu_k(t) e^{i(\nu_0 + k\omega_0)t} + \bar{\mu}_k(t) e^{-i(\nu_0 + k\omega_0)t}, \quad (5.3.113)$$

$$\xi_k^-(t) = v_k(t) e^{i(\nu_0 - k\omega_0)t} + \bar{v}_k(t) e^{-i(\nu_0 - k\omega_0)t}. \quad (5.3.114)$$

Теорема 5.3.10. *Випадкові процеси (5.3.113) і (5.3.114) є стаціонарними і взаємно періодично нестаціонарними, їх авто- та взаємо кореляційні функції визначаються за формулами:*

$$R_{\xi_k^+ \xi_l^+}(t, u) = \frac{1}{4} \left[[R_{p_k p_l}^c(u) + R_{q_k q_l}^c(u) + R_{q_k p_l}^{cs}(u) + R_{p_k q_l}^{sc}(u)] \cos((l-k)\omega_0 t + (\nu_0 + l\omega_0)u) + [R_{p_k q_l}^c(u) - R_{q_k p_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{cs}(u)] \sin((l-k)\omega_0 t + (\nu_0 + l\omega_0)u) \right], \quad (5.3.115)$$

$$R_{\xi_k^- \xi_l^-}(t, u) = \frac{1}{4} \left[[R_{p_k p_l}^c(u) + R_{q_k q_l}^c(u) + R_{p_k q_l}^{cs}(u) + R_{q_k p_l}^{sc}(u)] \cos((l-k)\omega_0 t + (\nu_0 - l\omega_0)u) + [R_{q_k p_l}^c(u) - R_{p_k q_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{cs}(u)] \sin((k-l)\omega_0 t + (\nu_0 - l\omega_0)u) \right], \quad (5.3.116)$$

$$R_{\xi_k^+ \xi_l^-}(t, u) = \frac{1}{4} \left[[R_{p_k p_l}^c(u) - R_{q_k q_l}^c(u) + R_{p_k q_l}^{cs}(u) + R_{q_k p_l}^{sc}(u)] \cos((l+k)\omega_0 t - (\nu_0 - l\omega_0)u) + [R_{p_k q_l}^c(u) + R_{q_k p_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^{cs}(u) - R_{q_k q_l}^{cs}(u)] \sin((l+k)\omega_0 t - (\nu_0 - l\omega_0)u) \right],$$

$$+\left[R_{p_k q_l}^c(u) + R_{q_k p_l}^c(u) - R_{p_k p_l}^{cs}(u) - R_{q_k q_l}^{sc}(u)\right] \sin((l+k)\omega_0 t - (v_0 - l\omega_0)u), \quad (5.3.117)$$

$$R_{\xi_k^+ \xi_l^+}^-(t, u) = \frac{1}{4} \left[\left[R_{p_k p_l}^c(u) - R_{q_k q_l}^c(u) - R_{p_k q_l}^{cs}(u) - R_{q_k p_l}^{sc}(u) \right] \cos((l+k)\omega_0 t + (v_0 + l\omega_0)u) + \right. \\ \left. + \left[R_{p_k q_l}^c(u) + R_{q_k p_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{sc}(u) \right] \sin((l+k)\omega_0 t + (v_0 + l\omega_0)u) \right], \quad (5.3.118)$$

$$i R_{\xi_k^+ \xi_l^+}^-(t, u) = R_{\xi_k^+ \xi_l^+}^-(t + u, -u).$$

Доведення.

Виходячи з (5.3.113) для взаємних кореляційних функцій випадкових процесів з різними порядками маємо:

$$R_{\xi_k^+ \xi_l^+}^-(t, u) = 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{i(v_0 + l\omega_0)u} \left[R_{\mu_k \mu_l}^-(u) e^{i(l-k)\omega_0 t} + R_{\mu_k \mu_l}(u) e^{i[2v_0 + (l+k)\omega_0]t} \right] \right\}, \quad (5.3.119)$$

де

$$R_{\mu_k \mu_l}^-(u) = \frac{1}{4} \left[R_{\mu_k \mu_l}^c(u) + R_{\mu_k \mu_l}^s(u) + i \left[R_{\mu_k \mu_l}^{sc}(u) - R_{\mu_k \mu_l}^{cs}(u) \right] \right], \quad (5.3.120)$$

$$R_{\mu_k \mu_l}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{\mu_k \mu_l}^c(u) - R_{\mu_k \mu_l}^s(u) - i \left[R_{\mu_k \mu_l}^{cs}(u) + R_{\mu_k \mu_l}^{sc}(u) \right] \right]. \quad (5.3.121)$$

Використовуючи вирази (5.3.111) і (5.3.112) та враховуючи співвідношення (5.3.105)–(5.3.107), маємо:

$$R_{\mu_k \mu_l}^c(u) + R_{\mu_k \mu_l}^s(u) = \frac{1}{2} \left[R_{p_k p_l}^c(u) + R_{q_k q_l}^c(u) + R_{q_k p_l}^{cs}(u) + R_{p_k q_l}^{sc}(u) \right], \quad (5.3.122)$$

$$R_{\mu_k \mu_l}^{cs}(u) - R_{\mu_k \mu_l}^{sc}(u) = \frac{1}{2} \left[R_{p_k q_l}^c(u) - R_{q_k p_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{sc}(u) \right], \quad (5.3.123)$$

$$R_{\mu_k \mu_l}^c(u) - R_{\mu_k \mu_l}^s(u) = 0, \quad R_{\mu_k \mu_l}^{cs}(u) + R_{\mu_k \mu_l}^{sc}(u) = 0. \quad (5.3.124)$$

Підставляючи (5.3.122)–(5.3.124) в (5.3.114), отримуємо формулу (5.3.115).

Функція взаємної кореляції (5.3.114) для різних порядків визначається виразом:

$$R_{\xi_k^+ \xi_l^+}^-(t, u) = 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{i(v_0 - l\omega_0)u} \left[R_{\nu_k \nu_l}^-(u) e^{i(k-l)\omega_0 t} + R_{\nu_k \nu_l}(u) e^{i[2\nu_0 - (l+k)\omega_0]t} \right] \right\}, \quad (5.3.125)$$

де

$$R_{\bar{v}_k v_l}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{v_k v_l}^c(u) + R_{v_k v_l}^s(u) + i \left[R_{v_k v_l}^{sc}(u) - R_{v_k v_l}^{cs}(u) \right] \right], \quad (5.3.126)$$

$$R_{v_k v_l}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{v_k v_l}^c(u) - R_{v_k v_l}^s(u) - i \left[R_{v_k v_l}^{sc}(u) + R_{v_k v_l}^{cs}(u) \right] \right], \quad (3.127)$$

Аналогічно до наведених вище розрахунків, використовуючи співвідношення (5.3.111), (5.3.112) та умови (5.3.105)–(5.3.107), отримуємо:

$$R_{v_k v_l}^c(u) + R_{v_k v_l}^s(u) = \frac{1}{2} \left[R_{p_k p_l}^c(u) + R_{q_k q_l}^c(u) + R_{p_k q_l}^{cs}(u) + R_{q_k p_l}^{sc}(u) \right],$$

$$R_{v_k v_l}^{cs}(u) - R_{v_k v_l}^{sc}(u) = \frac{1}{2} \left[R_{q_k p_l}^c(u) - R_{p_k q_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{cs}(u) \right],$$

$$R_{v_k v_l}^c(u) - R_{v_k v_l}^s(u) = 0, \quad R_{v_k v_l}^{cs}(u) + R_{v_k v_l}^{sc}(u) = 0.$$

Після підстановки цих співвідношень в (5.3.126), (5.3.127) і (5.3.125), отримуємо формулу (5.3.116).

Для функцій взаємної кореляції (5.3.113) і (5.3.114) маємо:

$$R_{\bar{\xi}_k^+ \bar{\xi}_l^-}(t, u) = 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{i(v_0 - l\omega_0)u} \left[R_{\bar{\mu}_k v_l}(u) e^{-i(l+k)\omega_0 t} + R_{\mu_k v_l}(u) e^{i2v_0 t} e^{-i(l-k)\omega_0 t} \right] \right\}, \quad (5.3.128)$$

$$R_{\bar{\xi}_k^- \bar{\xi}_l^+}(t, u) = 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{i(v_0 + l\omega_0)u} \left[R_{\bar{v}_k \mu_l}(u) e^{i(l+k)\omega_0 t} + R_{v_k \mu_l}(u) e^{i2v_0 t} e^{i(l-k)\omega_0 t} \right] \right\}, \quad (5.3.129)$$

де

$$R_{\bar{\mu}_k v_l}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{\mu_k v_l}^c(u) + R_{\mu_k v_l}^s(u) - i \left[R_{\mu_k v_l}^{cs}(u) - R_{\mu_k v_l}^{sc}(u) \right] \right],$$

$$R_{\mu_k v_l}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{\mu_k v_l}^c(u) - R_{\mu_k v_l}^s(u) - i \left[R_{\mu_k v_l}^{cs}(u) + R_{\mu_k v_l}^{sc}(u) \right] \right],$$

$$R_{\bar{v}_k \mu_l}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{v_k \mu_l}^c(u) + R_{v_k \mu_l}^s(u) - i \left[R_{v_k \mu_l}^{cs}(u) - R_{v_k \mu_l}^{sc}(u) \right] \right],$$

$$R_{v_k \mu_l}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{v_k \mu_l}^c(u) + R_{v_k \mu_l}^s(u) - i \left[R_{v_k \mu_l}^{cs}(u) + R_{v_k \mu_l}^{sc}(u) \right] \right].$$

Беручи до уваги (5.3.111), (5.3.112) та (5.3.105)–(5.3.107), отримуємо:

$$R_{\mu_k \nu_l}^c(u) + R_{\mu_k \nu_l}^s(u) = \frac{1}{2} \left[R_{p_k p_l}^c(u) - R_{q_k q_l}^c(u) + R_{p_k q_l}^{cs}(u) + R_{q_k p_l}^{cs}(u) \right],$$

$$R_{\mu_k \nu_l}^{cs}(u) - R_{\mu_k \nu_l}^{sc}(u) = \frac{1}{2} \left[R_{p_k p_l}^{cs}(u) - R_{q_k q_l}^{sc}(u) - R_{p_k q_l}^c(u) - R_{q_k p_l}^c(u) \right],$$

$$R_{\mu_k \nu_l}^c(u) - R_{\mu_k \nu_l}^s(u) = 0,$$

$$R_{\mu_k \nu_l}^{sc}(u) + R_{\mu_k \nu_l}^{cs}(u) = 0$$

$$R_{\nu_k \mu_l}^c(u) + R_{\nu_k \mu_l}^s(u) = \frac{1}{2} \left[R_{p_k p_l}^c(u) - R_{q_k q_l}^c(u) - R_{p_k q_l}^{cs}(u) - R_{q_k p_l}^{cs}(u) \right],$$

$$R_{\nu_k \mu_l}^{cs}(u) - R_{\nu_k \mu_l}^{sc}(u) = \frac{1}{2} \left[R_{p_k q_l}^c(u) + R_{q_k p_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{sc}(u) \right],$$

$$R_{\nu_k \mu_l}^c(u) - R_{\nu_k \mu_l}^s(u) = 0,$$

$$R_{\nu_k \mu_l}^{cs}(u) + R_{\nu_k \mu_l}^{sc}(u) = 0.$$

Використовуючи ці співвідношення, з (5.3.128) і (5.3.129) переходимо до (5.3.117) і (5.3.118). Рівність $R_{\xi_k^+ \xi_l^-}(t, u) = R_{\xi_k^- \xi_l^+}(t + u, -u)$ можна перевірити шляхом безпосередньої підстановки аргументу $t + u$ замість t і $-u$ замість u в (5.3.117) та застосування умов (5.3.105)–(5.3.107).

Підставляючи $k = l$ (5.3.115) і (5.3.116), отримуємо формули для кореляційної функції (5.3.113) і (5.3.114):

$$\begin{aligned} R_{\xi_k^+}^-(u) = & \frac{1}{4} \left[\left[R_{p_k}^c(u) + R_{q_k}^c(u) - 2\tilde{R}_{p_k q_k}^{cs}(u) \right] \cos(\nu_0 + k\omega_0)u + \right. \\ & \left. + \left[R_{p_k}^{cs}(u) + R_{q_k}^{cs}(u) + 2\tilde{\tilde{R}}_{p_k q_k}^{cs}(u) \right] \sin(\nu_0 + k\omega_0)u \right], \end{aligned} \quad (5.3.130)$$

$$\begin{aligned} R_{\xi_k^-}^+(u) = & \frac{1}{4} \left[\left[R_{p_k}^c(u) + R_{q_k}^c(u) + 2\tilde{R}_{p_k q_k}^{cs}(u) \right] \cos(\nu_0 - k\omega_0)u + \right. \\ & \left. + \left[R_{p_k}^{cs}(u) + R_{q_k}^{cs}(u) - 2\tilde{\tilde{R}}_{p_k q_k}^{cs}(u) \right] \sin(\nu_0 - k\omega_0)u \right]. \end{aligned} \quad (5.3.131)$$

Ці функції залежать лише від часової затримки u . Отже, випадкові процеси (5.3.113) і (5.3.114) є стаціонарними, але взаємно періодично нестаціонарними.

Теорему доведено.

Сума автокореляційних функцій (5.3.130) і (5.3.131) визначає частину кореляційної функції, що не залежить від часу, отже є нульовою кореляційною компонентою сигналу:

$$B_0^{(\xi)}(u) = \frac{1}{4} \sum_{k=-L}^L \left[\left[R_{p_k}^c(u) + R_{q_k}^c(u) \right] \cos v_0 u + \left[R_{p_k}^{cs}(u) + R_{q_k}^{cs}(u) \right] \sin v_0 u \right] \cos k \omega_0 u + \\ + 2 \left[\tilde{R}_{p_k q_k}^c(u) \cos v_0 u + \tilde{R}_{p_k p_k}^{cs}(u) \sin \mu_0 u \right] \sin l v_0 u. \quad (5.3.132)$$

Компонента кореляційної функції, котра залежить від часу, визначається сумою взаємних кореляційних функцій (5.3.115)–(5.3.118).

Вирази для амплітуд кожної гармоніки кореляційної функції, тобто кореляційні компоненти $B_r^{(\xi)}(u)$, можна легко отримати за допомогою виразу (5.3.88). Представмо модулюючий процес $\xi_k(t)$ у вигляді:

$$\xi_k(t) = \frac{1}{2} \left[\xi_k^c(t) - i \xi_k^s(t) \right] = \frac{1}{2} \left[\mu_k(t) e^{i v_0 t} + \bar{\nu}(t) e^{i v_0 t} \right].$$

Отже,

$$R_{kl}^{(\xi)}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{\bar{\mu}_k \mu_l}(u) e^{i v_0 u} + R_{\bar{\nu}_k \bar{\nu}_l}(u) e^{-i v_0 u} \right]. \quad (5.3.133)$$

Враховуючи співвідношення (5.3.120), (5.3.126), а також $R_{\bar{\nu}_k \bar{\nu}_l}(u) = R_{\bar{\nu}_k \nu_l}(u)$, знаходимо:

$$R_{kl}^{(\xi)}(u) = \frac{1}{4} \left[\left[R_{p_k p_l}^c(u) + R_{q_k q_l}^c(u) \right] \cos v_0 u + \left[R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{cs}(u) \right] \sin v_0 u - \right. \\ \left. - i \left[\left[R_{p_k q_l}^c(u) - R_{q_k p_l}^c(u) \right] \cos v_0 u + \left[R_{p_k q_l}^{cs}(u) - R_{q_k p_l}^{cs}(u) \right] \sin v_0 u \sin v_0 u \right] \right]. \quad (5.3.134)$$

Зауважимо, що формула другого доданку в сумі (5.3.132), що визначає нульову кореляційну компоненту впливає з (5.3.134), коли $k = l$.

Теорема 5.3.11. Кореляційні компоненти сигналу та його перетворення Гільберта однакові. Взаємо кореляційні компоненти $B_r^{(\xi\eta)}(\tau)$ і $B_r^{(\eta\xi)}(\tau)$ відрізняються лише знаком і визначаються за формулою:

$$B_r^{(\xi\eta)}(u) = -B_r^{(\eta\xi)}(u) = \sum_{l \in M} R_{l-r,l}^{(\xi\eta)}(u) e^{i\omega_0 u},$$

де

$$\begin{aligned} R_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = & \frac{1}{4} \left[\left[R_{p_k p_l}^c(u) + R_{q_k q_l}^c(u) \right] \sin \nu_0 u - \left[R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{cs}(u) \right] \cos \nu_0 u + \right. \\ & \left. + i \left[\left[R_{p_k q_l}^{cs}(u) + R_{q_k p_l}^{sc}(u) \right] \cos \nu_0 u - \left[R_{p_k q_l}^c(u) - R_{q_k p_l}^c(u) \right] \sin \nu_0 u \right] \right], \quad (5.3.135) \\ & i R_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = H \left\{ R_{kl}^{(\xi)}(u) \right\}. \end{aligned}$$

Доведення. Для перетворень Гільберта від (5.3.102)–(5.3.104) маємо:

$$\eta_0(t) = p_0^c(t) \sin \nu_0 t - p_0^s(t) \cos \nu_0 t,$$

$$\eta_k^c(t) = p_k^c(t) \sin \nu_0 t - p_k^c(t) \cos \nu_0 t,$$

$$\eta_k^s(t) = q_k^c(t) \sin \nu_0 t - q_k^s(t) \cos \nu_0 t.$$

Тоді $\eta(t)$ може бути представлено гармонійним рядом

$$\eta(t) = \sum_{k \in Z} \eta_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad (5.3.136)$$

де

$$\eta_k(t) = \frac{1}{2} \left[\eta_k^c(t) - i \eta_k^s(t) \right] = \frac{i}{2} \left[\bar{\nu}_k(t) e^{-i\nu_0 t} - \mu_k(t) e^{i\nu_0 t} \right], \quad (5.3.137)$$

і $\eta_k(t) = \bar{\eta}_k(t)$. Виходячи з (5.3.135) і (5.3.137), отримуємо:

$$R_\eta(t, u) = E \left[\eta(t) \eta(t+u) \right] = \sum_{r=-2L}^{2L} B_r^{(\eta)}(u) e^{ir\omega_0 t},$$

де

$$B_r^{(\eta)}(u) = \sum_{l \in M} R_{l-r,lk}^{(\eta)}(u) e^{il\omega_0 u},$$

і

$$R_{kl}^{(\eta)}(u) = E[\bar{\eta}_k(t)\eta_l(t+u)] = \frac{1}{4} [R_{\bar{\mu}_k\mu_l}(u)e^{iv_0u} + R_{\nu_k\bar{\nu}_l}(u)e^{-iv_0u}]. \quad (5.3.138)$$

Як бачимо, праві частини виразів (5.3.133) і (5.3.138) співпадають. Тоді $B_r^{(\eta)}(u) = B_r^{(\xi)}(u)$. Для взаємно кореляційних компонентів отримуємо:

$$B_r^{(\xi\eta)}(u) = \sum_{l \in M} R_{l-r,l}^{(\xi\eta)}(u) e^{il\omega_0 u},$$

$$B_r^{(\eta\xi)}(u) = \sum_{l \in M} R_{l-r,l}^{(\eta\xi)}(u) e^{il\omega_0 u},$$

де

$$R_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = E[\bar{\xi}_k(t)\eta_l(t+u)] = \frac{1}{4} [R_{\nu_k\bar{\nu}_l}(u)e^{-iv_0u} - R_{\bar{\mu}_k\mu_l}(u)e^{iv_0u}], \quad (5.3.139)$$

$$R_{kl}^{(\eta\xi)}(u) = E[\bar{\eta}_k(t)\xi_l(t+u)] = \frac{1}{4} [R_{\bar{\mu}_k\mu_l}(u)e^{iv_0u} - R_{\nu_k\bar{\nu}_l}(u)e^{-iv_0u}]. \quad (5.3.140)$$

Величини (5.3.139) і (5.3.140) відрізняються лише знаком, отже $B_r^{(\xi\eta)}(u) = -B_r^{(\eta\xi)}(u)$.

Підставляючи співвідношення (5.3.120) і (5.3.116) в (5.3.139), приходимо до формул (5.3.135). З отриманого співвідношення випливає, що $H\{R_{kl}^{(\xi)}(u)\}$ співпадає з (5.3.135). **Теорему доведено.**

Беручи $k=l$ в (5.3.135), отримуємо формулу для нульової взаємної кореляційної компоненти:

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{4} \sum_{k=-L}^L \left[[R_{p_k}^c(u) + R_{q_k}^c(u)] \sin v_0 u - [R_{p_k}^{cs}(u) + R_{q_k}^{cs}(u)] \cos v_0 u + \right. \\ \left. + 2i \left[\tilde{R}_{p_k q_k}^{cs}(u) \cos v_0 u - 2\tilde{R}_{p_k q_k}^c(u) \sin v_0 u \right] \right].$$

Як бачимо, ця величина є непарною функцією часової затримки.

Аналітичний сигнал для багатокompонентного сигналу у випадку, коли квадратури мають вигляд (5.3.102)–(5.3.104), можна представити рядом:

$$\zeta(t) = \zeta_0(t) + \sum_{k=1}^L [\mu_k(t) e^{i(v_0+k\omega_0)t} + \nu_k(t) e^{i(v_0-k\omega_0)t}],$$

де $\zeta_0(t) = \xi_0(t) + iH\{\xi_0(t)\}$. Його кореляційні компоненти визначаються виразом:

$$B_r^{(\zeta)}(u) = 2 \left[B_r^{(\xi)}(u) + iB_r^{(\xi\eta)}(u) \right] = \sum_{l \in M} R_{l-r,l}^{(\zeta)}(u) e^{i\omega_0 u},$$

де

$$R_{kl}^{(\zeta)}(u) = \frac{1}{2} \left[R_{p_k p_l}^c(u) + R_{q_k q_l}^c(u) - R_{p_k q_l}^{cs}(u) + R_{q_k p_l}^{cs}(u) - \right. \\ \left. - i \left[R_{p_k q_l}^c(u) - R_{q_k p_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{cs}(u) \right] \right] e^{i\nu_0 u}.$$

Величина дисперсії аналітичного сигналу рівна подвоєній величині дисперсії сигналу:

$$b_\zeta(t,0) = 2b_\xi(t,0) = 2B_0^{(\xi)}(0) + 2 \sum_{r=1}^{2L} \left[C_r^{(\xi)}(0) \cos r\omega_0 t + S_r^{(\xi)}(0) \sin r\omega_0 t \right].$$

Тут

$$B_0^{(\xi)}(0) = \frac{1}{4} \sum_{k=-L}^L \left[R_{p_k}^c(0) + R_{q_k}^c(0) \right], \\ C_r^{(\xi)}(0) = \frac{1}{2} \sum_{l \in M} \left[R_{p_l-r,p_l}^c(0) + R_{q_l-r,q_l}^c(0) \right], \\ S_r^{(\xi)}(0) = \frac{1}{2} \sum_{l \in M} \left[R_{p_l-r,q_l}^c(0) - R_{q_l-r,p_l}^c(0) \right].$$

Зміни дисперсії в часі спостерігаються на стаціонарному фоні, при цьому сума потужності квадратур задає величину фону. Амплітуда кожної гармоніки задається величиною кореляції квадратур, котрі повністю характеризуються кореляційними компонентами.

Для більш детального аналізу структури кореляцій квадратур можна виділити вузькосмугові складові:

$$\xi_k^+(t) = \mu_k^c(t) \cos(\nu_0 + k\omega_0)t + \mu_k^s(t) \sin(\nu_0 + k\omega_0)t, \quad (5.3.141)$$

$$\xi_k^-(t) = \nu_k^c(t) \cos(\nu_0 - k\omega_0)t + \nu_k^s(t) \sin(\nu_0 - k\omega_0)t, \quad (5.3.142)$$

за допомогою фільтрації фільтром з функцією перетворення виду (5.1.21). Для перетворень Гільберта від (5.3.141) і (5.3.142) маємо:

$$\eta_k^+(t) = \mu_k^c(t) \sin(\nu_0 + k\omega_0)t - \mu_k^s(t) \cos(\nu_0 + k\omega_0)t, \quad (5.3.143)$$

$$\eta_k^-(t) = \nu_k^c(t) \sin(\nu_0 - k\omega_0)t - \nu_k^s(t) \sin(\nu_0 - k\omega_0)t. \quad (5.3.144)$$

З (5.3.141) і (5.3.143), (5.3.142) і (5.3.144) отримуємо:

$$\mu_k^c(t) = \xi_k^+(t) \cos(\nu_0 + k\omega_0)t + \eta_k^+(t) \sin(\nu_0 + k\omega_0)t,$$

$$\mu_k^s(t) = \xi_k^+(t) \sin(\nu_0 + k\omega_0)t - \eta_k^+(t) \cos(\nu_0 + k\omega_0)t,$$

$$\nu_k^c(t) = \xi_k^-(t) \cos(\nu_0 - k\omega_0)t + \eta_k^-(t) \sin(\nu_0 - k\omega_0)t,$$

$$\nu_k^s(t) = \xi_k^-(t) \sin(\nu_0 - k\omega_0)t - \eta_k^-(t) \cos(\nu_0 - k\omega_0)t.$$

Враховуючи рівності (5.3.111) і (5.3.112), легко знаходимо вирази для квадратур модулюючих процесів (5.3.102)–(5.3.104):

$$p_k^c(t) = \xi_k^+(t) \cos(\mu_0 + k\omega_0)t + \xi_k^-(t) \cos(\nu_0 - k\omega_0)t + \\ + \eta_k^+(t) \sin(\nu_0 + k\omega_0)t + \eta_k^-(t) \sin(\nu_0 - k\omega_0)t,$$

$$p_k^s(t) = \xi_k^+(t) \sin(\mu_0 + k\omega_0)t + \xi_k^-(t) \sin(\nu_0 - k\omega_0)t - \\ - \eta_k^+(t) \cos(\nu_0 + k\omega_0)t + \eta_k^-(t) \cos(\nu_0 - k\omega_0)t,$$

$$q_k^c(t) = \xi_k^+(t) \sin(\mu_0 + k\omega_0)t - \xi_k^-(t) \sin(\nu_0 - k\omega_0)t - \\ - \eta_k^+(t) \cos(\nu_0 + k\omega_0)t + \eta_k^-(t) \cos(\nu_0 - k\omega_0)t,$$

$$q_k^s(t) = \xi_k^-(t) \cos(\mu_0 - k\omega_0)t + \xi_k^+(t) \cos(\nu_0 + k\omega_0)t + \\ + \eta_k^+(t) \sin(\nu_0 - k\omega_0)t - \eta_k^-(t) \sin(\nu_0 + k\omega_0)t.$$

Ці співвідношення можуть бути використані для створення методик обробки експериментальних даних для вділення високочастотних квадратур та аналізу їх властивостей. Кореляційна та спектральна структура квадратур можуть мати особливості, специфічні для об'єктів, що генерують ПНВС.

З наведеного тут випливає, що сума спектрів потужності вузькосмугових процесів (5.3.113) і (5.3.114) дорівнює спектру потужності самого сигналу, при цьому величини цих потужностей задаються їх автокореляційними функціями (5.3.130) і (5.3.131):

$$f_0^{(\xi)}(\omega) = f_{\xi_0}(\omega) + \sum_{k=1}^L \left[f_{\xi_k^+}(\omega) + f_{\xi_k^-}(\omega) \right],$$

де

$$f_{\xi_0}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi_0}(u) e^{-i\omega u} du,$$

$$f_{\xi_k^+}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi_k^+}(u) e^{-i\omega u} du,$$

$$f_{\xi_k^-}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi_k^-}(u) e^{-i\omega u} du.$$

Тоді як часові зміни дисперсії сигналу викликані взаємними кореляціями цих процесів. Отже, ми робимо висновок, що смугова фільтрація вхідного сигналу з смугою, вузькою ніж $\left[\nu_0 - \left(L + \frac{1}{2} \right) \omega_0, \nu_0 + \left(L + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \right]$ призводить до зменшення як потужності стаціонарного фону, так і амплітуд окремих гармонік дисперсії сигналу.

5.4. Симуляція періодично нестационарних випадкових сигналів та їх аналіз.

Покажемо застосування розглянутих вище методик для аналізу симульованих даних. Для симуляції ПНВС обрано наступну модель [210]:

$$\xi(nh) = \xi_c(nh) \cos \omega_0 nh + \xi_s(nh) \sin \omega_0 nh, \quad (5.4.1)$$

де квадратури мають вид:

$$\xi_c(nh) = p_c(nh) \cos \nu_0 nh + p_s(nh) \sin \nu_0 nh, \quad (5.4.2)$$

$$\xi_s(nh) = g_c(nh)\cos\nu_0nh + g_s(nh)\sin\nu_0nh. \quad (5.4.3)$$

і $Ep_{c,s}(nh) = Eq_{c,s}(nh) = 0$, $r_p^{c,s}(jh) = Ep_{c,s}(nh)p_{c,s}((n+j)h)$, $r_q^{c,s}(jh) = Eq_{c,s}(nh)q_{c,s}((n+j)h)$. Приймаємо що $r_p^c(jh) = r_p^s(jh)$, $r_q^c(jh) = r_q^s(jh)$, $r_p^c(jh) \neq r_q^c(jh)$ і $r_{pq}^{c,s}(jh) = 0$, $r_p^{cs}(jh) = 0$, $r_q^{cs}(jh) = 0$. Квадратури мають різні автокореляційні функції і в цьому випадку не корелюють. Кореляційна функція (5.4.1) дорівнює:

$$b_\xi(nh, jh) = B_0^{(\xi)}(jh) + C_2^{(\xi)}(jh)\cos 2\omega_0nh + S_2^{(\xi)}(jh)\sin 2\omega_0nh,$$

де

$$B_0^{(\xi)}(jh) = \frac{1}{2} [r_p^c(jh) + r_q^c(jh)] \cos \nu_0jh \cos \omega_0jh, \quad (5.4.4)$$

$$C_2^{(\xi)}(jh) = \frac{1}{2} [r_p^c(jh) - r_q^c(jh)] \cos \nu_0jh \cos \omega_0jh, \quad (5.4.5)$$

$$S_2^{(\xi)}(jh) = \frac{1}{2} [r_p^c(jh) - r_q^c(jh)] \cos \nu_0jh \sin \omega_0jh. \quad (5.4.6)$$

Припустивши, що

$$r_p^c(jh) = A_p e^{-\alpha_p |jh|}, \quad r_q^c(jh) = A_q e^{-\alpha_q |jh|},$$

вибираємо наступні значення параметрів для симулювання ПНВС:

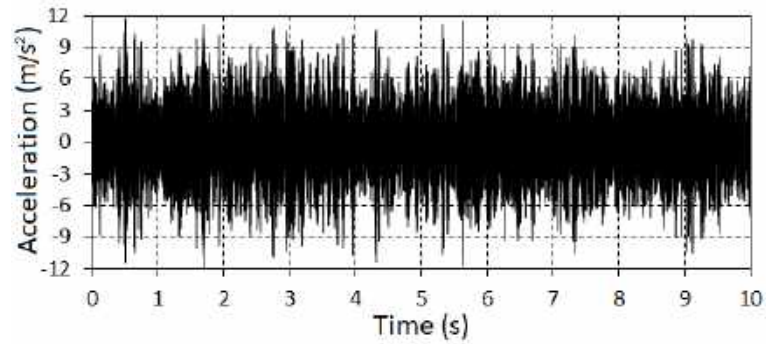
$$A_p = 10, \quad A_q = 4, \quad \alpha_p = \alpha_q = 0.01, \quad \omega_0 = 10^2 \pi, \quad \nu_0 = 2 \cdot 10^3 \pi.$$

Симульований часовий ряд показано на Рис. 5.4.1 (а), а його фрагмент в межах 0,05 с – на Рис. 5.4.1 (б). На Рис. 5.4.2 представлені оцінки компонентів кореляції. Їх розраховували за формулами:

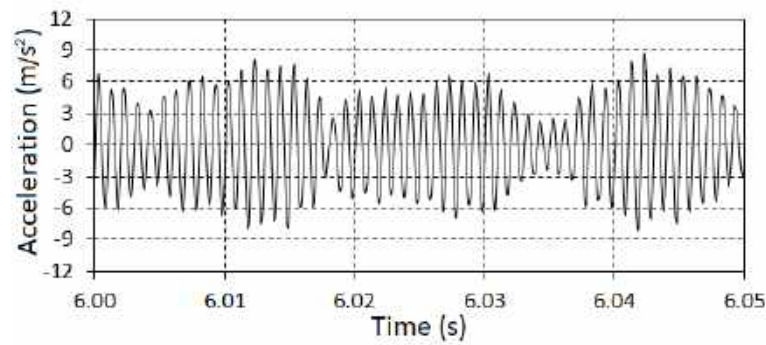
$$\hat{B}_0^{(\xi)}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi(nh) \xi((n+j)h), \quad (5.4.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_2^{(\xi)}(jh) \\ \hat{S}_2^{(\xi)}(jh) \end{array} \right\} = \frac{2}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi(nh) \xi((n+j)h) \left\{ \begin{array}{l} \cos 2\omega_0nh \\ \sin 2\omega_0nh \end{array} \right\}, \quad (5.4.8)$$

для $K = 5 \cdot 10^4$. Як бачимо, форми оцінок та їх числові значення несуттєво відрізняються від теоретичних (5.4.4)–(5.4.6).

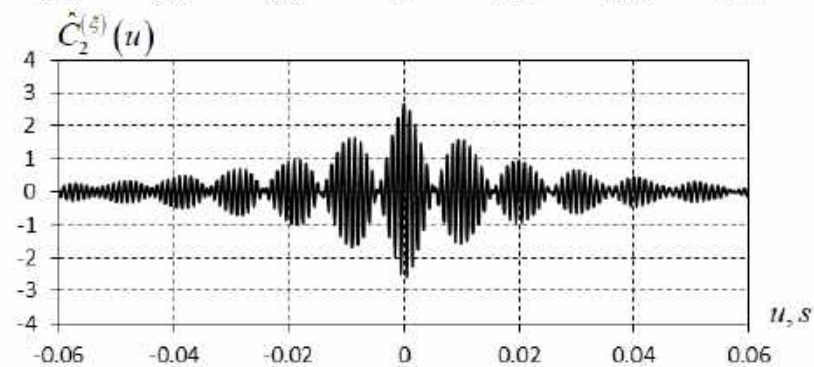
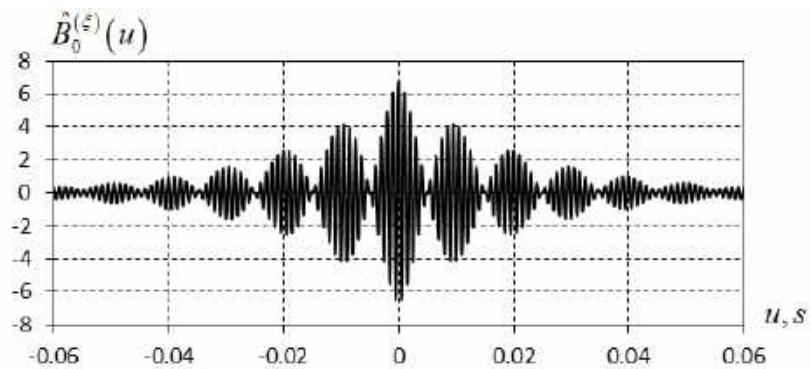


а)



б)

Рис. 5.4.1. Симульований часовий ряд ПНВС (а) та його малий фрагмент (б)



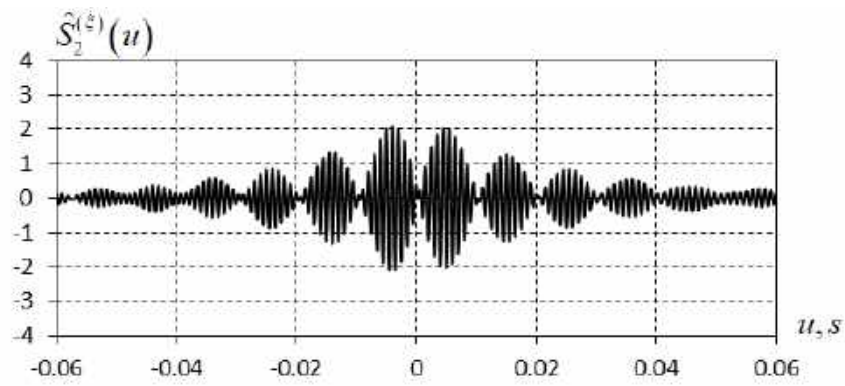


Рис. 5.4.2. Оцінки кореляційних компонент симульованого часового ряду

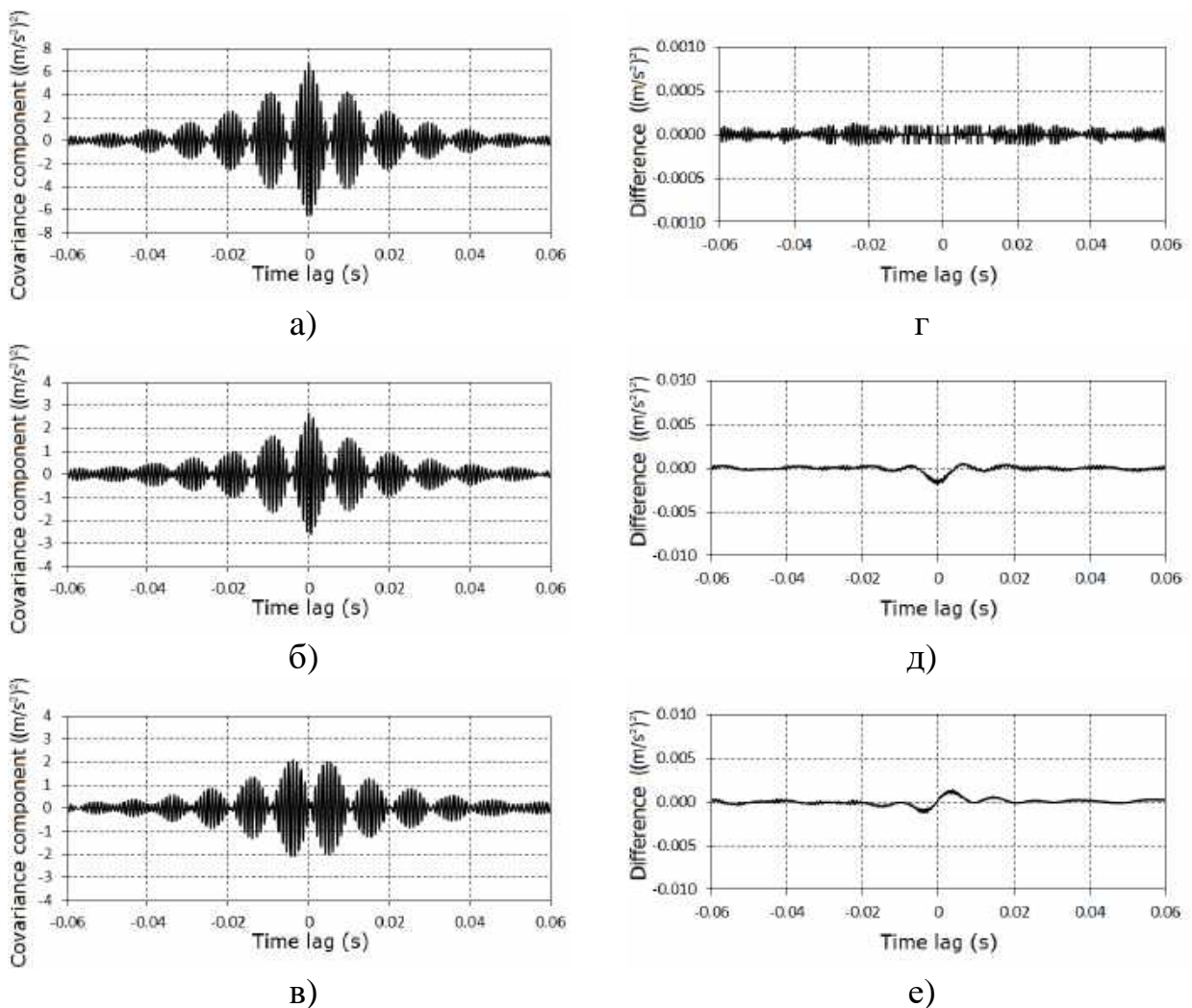


Рис.5.4.3. Оцінки кореляційних компонентів перетворення Гільберта сигналу:

((а) $\hat{B}_0^{(n)}(u)$; (б) $\hat{C}_2^{(n)}(u)$; (в) $\hat{S}_2^{(n)}(u)$) та їх різниці з відповідними компонентами сигналу: $\hat{B}_0^{(\xi)}(u) - \hat{B}_0^{(n)}(u)$ (Г), $\hat{C}_2^{(\xi)}(u) - \hat{C}_2^{(n)}(u)$ (Д) та $\hat{S}_2^{(\xi)}(u) - \hat{S}_2^{(n)}(u)$ (е)

Розрахунки, проведені на основі перетворення Гільберта для часового ряду:

$$\eta(nh) = \xi_c(nh) \cos \omega_0 nh + \xi_s(nh) \sin \omega_0 nh$$

підтверджують, що відмінностями між величинами кореляційних компонентів для сигналу та його перетворення Гільберта можна знехтувати (Рис. 5.4.3).

Спектральна густина потужності нульової складової була оцінена за формулою:

$$\hat{f}_0(\omega) = \frac{h}{2\pi} \sum_{n=-L}^L \hat{B}_0^{(\xi)}(nh) k(nh) \cos \omega nh,$$

тут $k(nh)$ – вікно Хеммінга, $L = \frac{u_m}{h}$, де u_m – точка обрізання корелограми, показана на Рис. 5.4.4. Графік $\hat{f}_0(\omega)$ має два чіткі піки. Використовуючи два смугові фільтри з функціями передачі виду (5.1.21)

$$H_1(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{for } \omega \in [9 \cdot 10^2 \text{ Hz}, 10^3 \text{ Hz}] \\ 0 & \text{for other,} \end{cases}$$

і

$$H_2(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{for } \omega \in [10^3 \text{ Hz}, 11 \cdot 10^3 \text{ Hz}] \\ 0 & \text{for other,} \end{cases}$$

можна розділити симульований ряд на дві спектральні складові, кожену складову можна представити у формі

$$\xi^+(nh) = \mu_c(nh) \cos(\nu_0 + \omega_0)nh + \mu_s(nh) \sin(\nu_0 + \omega_0)nh, \quad (5.4.9)$$

$$\xi^-(nh) = \nu_c(nh) \cos(\nu_0 - \omega_0)nh + \nu_s(nh) \sin(\nu_0 - \omega_0)nh, \quad (5.4.10)$$

де

$$\mu_c(t) = \frac{1}{2} [p_c(t) - q_s(t)],$$

$$\mu_s(t) = \frac{1}{2} [q_c(t) + p_s(t)],$$

$$\nu_c(t) = \frac{1}{2} [p_c(t) + q_s(t)],$$

$$\nu_s(t) = \frac{1}{2} [p_s(t) + q_c(t)].$$

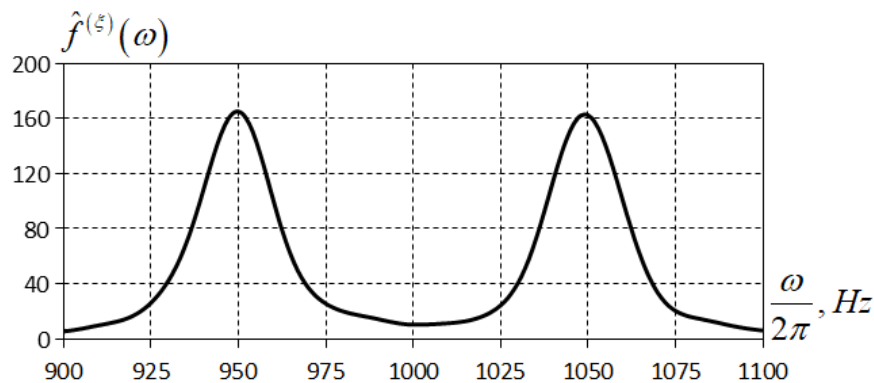


Рис.5.4.4. Оцінка спектральної густини потужності

Оцінки автокореляційних функцій для часових рядів (5.4.9) і (5.4.10) мають форму затухаючих гармонійних коливань (Рис. 5.4.5) з відповідними частотами 950 Гц і 1050 Гц. Значення оцінок в межах статистичної точності збігаються з теоретичними значеннями, визначеними за формулами

$$R_{\xi^+}(u) = \frac{1}{4} [r_p^c(u) + r_q^c(u)] \cos(\nu_0 + \omega_0)u,$$

$$R_{\xi^-}(u) = \frac{1}{4} [r_p^c(u) + r_q^c(u)] \cos(\nu_0 - \omega_0)u.$$

Величини оцінок другої компоненти для часових рядів (5.4.9) та (5.4.10) для довільного часу затримки менші за $1 \cdot 10^{-2}$. Таким чином, розділені по спектру реалізації (5.4.9) і (5.4.10) можна розглядати як реалізації стаціонарних випадкових процесів. Зауважимо, що сума їх автокореляційних функцій дорівнює нульовій кореляційній компоненті (5.4.7).

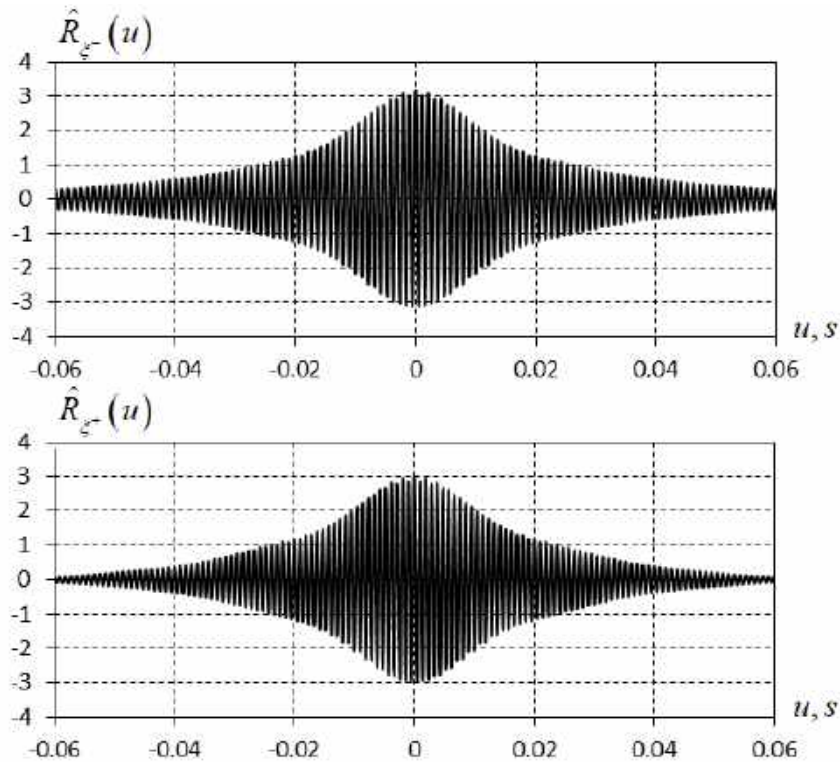


Рис. 5.4.5. Оцінки кореляційних функцій розділених складових

Для взаємних кореляційних функцій (5.4.9) і (5.4.10) маємо:

$$R_{\xi^+\xi^-}(t,u) = \frac{1}{4} [r_p^c(u) - r_q^c(u)] \cos[2\omega_0 t - (\nu_0 - \omega_0)u],$$

$$R_{\xi^-\xi^+}(t,u) = \frac{1}{4} [r_p^c(u) - r_q^c(u)] \cos[2\omega_0 t + (\nu_0 + \omega_0)u].$$

Легко побачити, що $R_{\xi^-\xi^+}(t,u) = R_{\xi^+\xi^-}(t+u, -u)$. Використовуючи статистики

$$\begin{cases} \hat{C}_2^{\xi^+\xi^-}(jh) \\ \hat{S}_2^{\xi^+\xi^-}(jh) \end{cases} = \frac{2}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi^+(nh) \xi^-((n+j)h) \begin{cases} \cos 2\omega_0 nh \\ \sin 2\omega_0 nh \end{cases},$$

$$\begin{cases} \hat{C}_2^{\xi^-\xi^+}(jh) \\ \hat{S}_2^{\xi^-\xi^+}(jh) \end{cases} = \frac{2}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi^-(nh) \xi^+((n+j)h) \begin{cases} \cos 2\omega_0 nh \\ \sin 2\omega_0 nh \end{cases},$$

оцінюємо амплітуду другої косинусної та синусної гармонік для взаємно кореляційних функцій (5.4.9) та (5.4.10). Додаючи відповідно ці величини, ми отримали оцінки компонентів кореляції (5.4.5) і (5.4.6), наведені на Рис. 5.4.2:

$$\hat{C}_2^{\xi^+ \xi^-} (jh) + \hat{C}_2^{\xi^- \xi^+} (jh) = \hat{C}_2^{\xi} (jh),$$

$$\hat{S}_2^{\xi^+ \xi^-} (jh) + \hat{S}_2^{\xi^- \xi^+} (jh) = \hat{S}_2^{(\xi)} (jh).$$

Використовуючи перетворення Гільберта процесів (5.4.9) і (5.4.10)

$$\eta^+ (nh) = \mu_c (nh) \sin(\nu_0 + \omega_0)nh - \mu_s (nh) \cos(\nu_0 + \omega_0)nh,$$

$$\eta^- (nh) = \nu_c (nh) \sin(\nu_0 - \omega_0)nh - \nu_s (nh) \cos(\nu_0 - \omega_0)nh,$$

отримуємо реалізації для їхніх квадратур:

$$\mu_c (nh) = \xi^+ (nh) \cos(\nu_0 + \omega_0)nh + \xi^- (nh) \sin(\nu_0 + \omega_0)nh,$$

$$\mu_s (nh) = \xi^+ (nh) \sin(\nu_0 + \omega_0)nh - \xi^- (nh) \cos(\nu_0 + \omega_0)nh,$$

$$\nu_c (nh) = \xi^- (nh) \cos(\nu_0 - \omega_0)nh + \xi^+ (nh) \sin(\nu_0 - \omega_0)nh,$$

$$\nu_s (nh) = \xi^- (nh) \sin(\nu_0 - \omega_0)nh - \xi^+ (nh) \cos(\nu_0 - \omega_0)nh.$$

Фрагменти квадратур часових рядів показані на Рис. 5.4.6. Оцінки їхніх кореляційних функцій представлені на Рис. 5.4.7. Вони є повільно зникаючими функціями. Незначна різниця між їх величинами і теоретичними значеннями, заданими

$$r_\mu^c (u) = \frac{1}{4} [r_p^c (u) + t_q^s (u)],$$

$$r_\mu^s (u) = \frac{1}{4} [r_p^s (u) + t_q^c (u)],$$

$$r_\nu^c (u) = \frac{1}{4} [r_p^c (u) + r_q^s (u)],$$

$$r_\nu^s (u) = \frac{1}{4} [r_p^s (u) + t_q^c (u)]$$

пояснюється статистичними похибками обчислень.

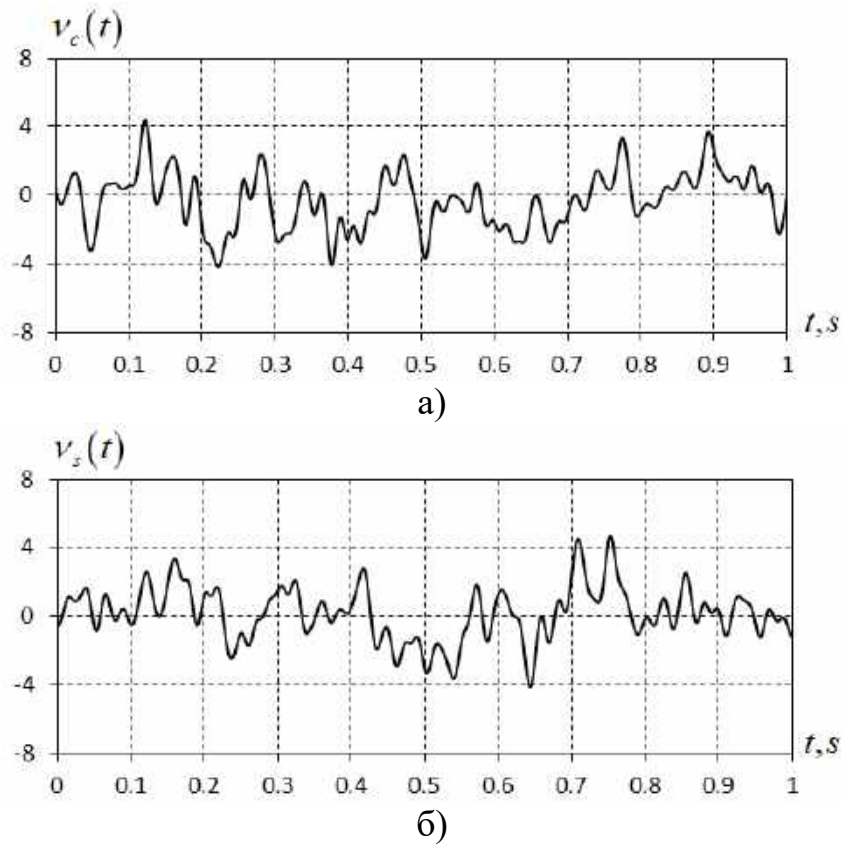


Рис. 5.4.6. Косинусна (а) і синусна (б) квадратури компоненти $\xi^-(t)$

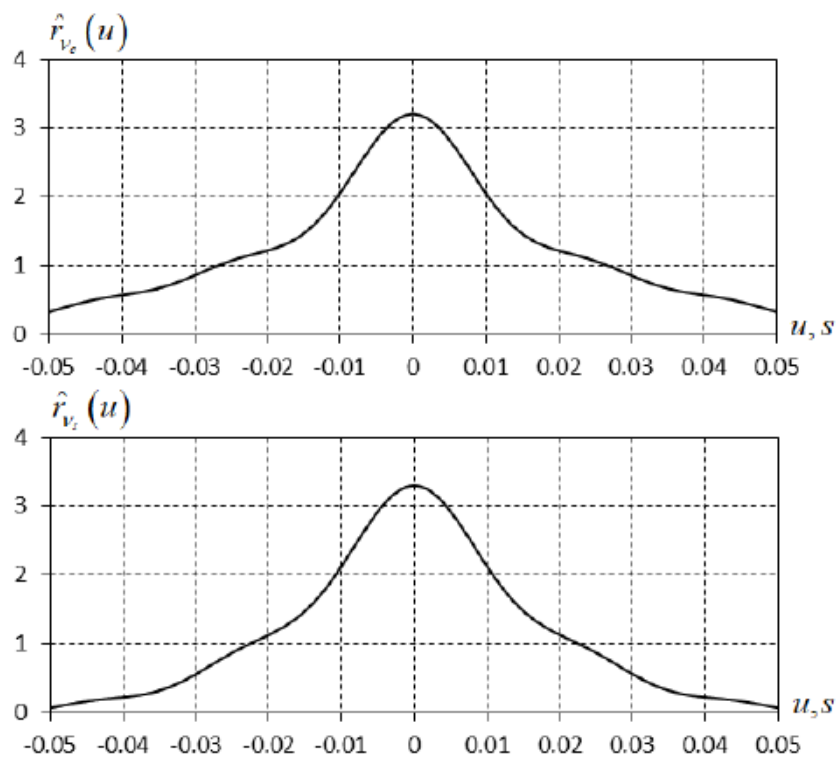


Рис.5.4.5. Автокореляційні функції квадратур

Результати розрахунків взаємних кореляційних функцій

$$\hat{r}_{\mu}^{cs}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \mu_c(nh) \mu_s((n+j)h),$$

$$\hat{r}_{v}^{cs}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} v_c(nh) v_s((n+j)h),$$

$$\hat{r}_{\mu v}^{cs}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \mu_c(nh) v_s((n+j)h),$$

$$\hat{r}_{v\mu}^{cs}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} v_c(nh) \mu_s((n+j)h)$$

підтверджують, що квадратури є некорельованими (Рис. 5.4.8 і Рис. 5.4.9).

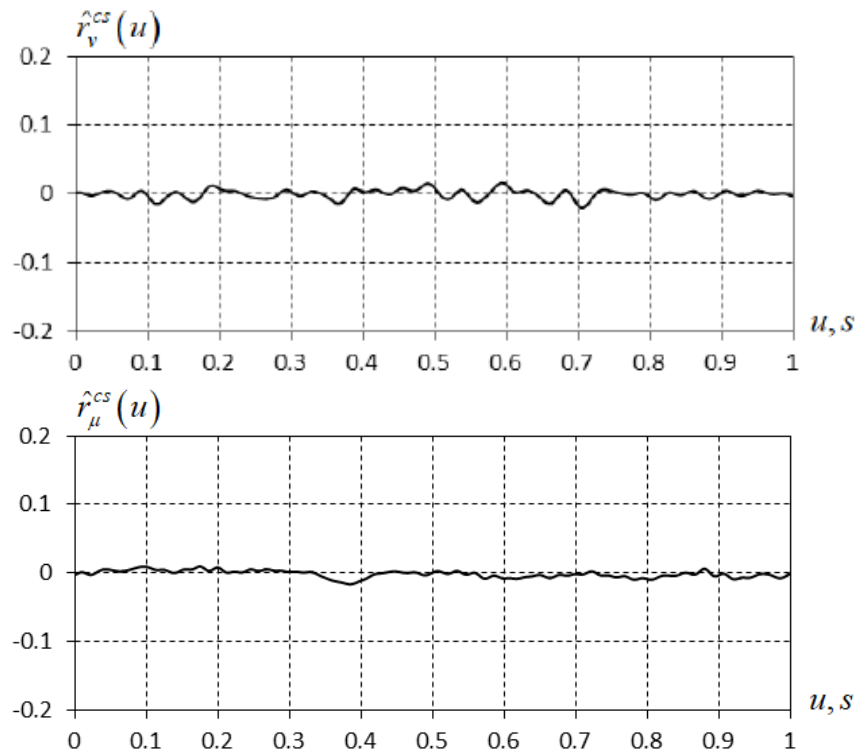


Рис.5.4.8. Взаємні кореляційні функції квадратур відповідних компонент

Перепишемо вираз (5.4.1) у вигляді:

$$\begin{aligned} \xi(nh) &= \sum_{k=-1,1} \left[\mu_k^c(nh) \cos(v_0 + k\omega_0)nh + \mu_k^s(nh) \sin(v_0 + k\omega_0)nh \right] = \\ &= \sum_{k=-1,1} \left[\mu_k(nh) e^{i(v_0 + k\omega_0)nh} + \bar{\mu}_k(nh) e^{-i(v_0 + k\omega_0)nh} \right], \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

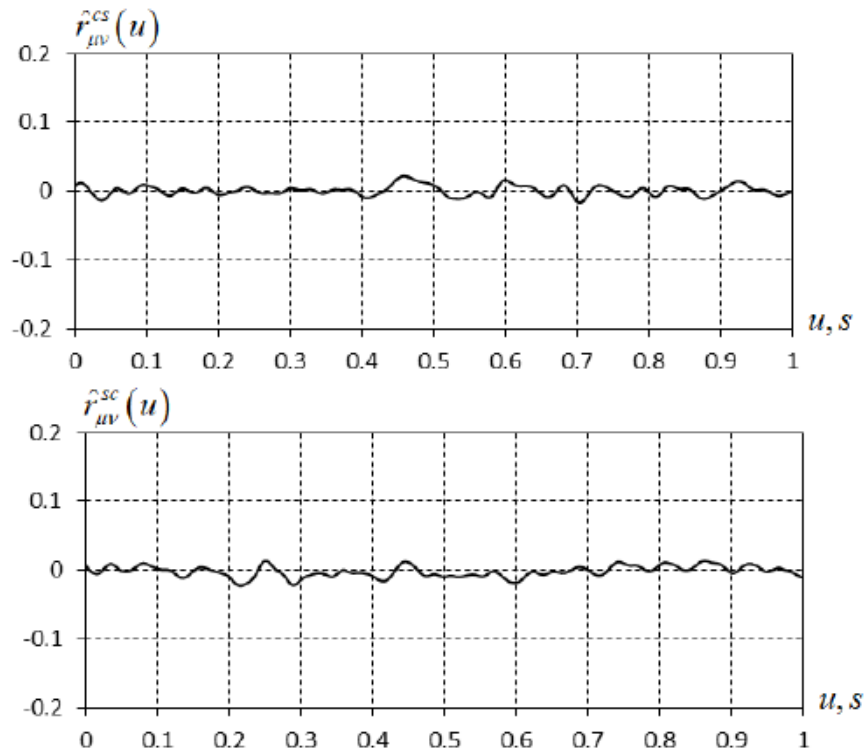


Рис.5.4.9. Взаємні кореляційні функції квадратур різних компонент

де

$$\mu_{-1}(nh) = \frac{1}{2} [\mu_{-1}^c(nh) - i\mu_{-1}^s(nh)],$$

$$\mu_1(nh) = \frac{1}{2} [\mu_1^c(nh) - i\mu_1^s(nh)],$$

і

$$\mu_{-1}^c(nh) = \nu_c(nh), \quad \mu_{-1}^s(nh) = \nu_s(nh),$$

$$\mu_1^c(nh) = \mu_c(nh), \quad \mu_1^s(nh) = \mu_s(nh).$$

Для кореляційної функції (5.4.11)отримуємо

$$b_\xi(nh, jh) = 2\text{Re} \left\{ \sum_{k,l=-1,1} R_{kl}(jh) e^{i[(l-k)nh + (v_0 + l\omega_0)jh]} \right\},$$

де

$$R_{kl}(jh) = E\bar{\mu}_k(nh)\mu_k((n+j)h) = \frac{1}{4} [R_{kl}^c(jh) + R_{kl}^s(jh) - i[R_{kl}^{cs}(jh) - R_{kl}^{sc}(jh)]],$$

i

$$R_{kl}^c(jh) = E \mu_k^c(nh) \mu_k^c((n+j)h),$$

$$R_{kl}^s(jh) = E \mu_k^s(nh) \mu_k^s((n+j)h),$$

$$R_{kl}^{cs}(jh) = E \mu_k^c(nh) \mu_l^s((n+j)h).$$

Оскільки при симуляції ми прийняли, що $R_{kl}^{cs}(jh) \equiv 0$, тоді

$$R_{kl}(jh) = \frac{1}{4} [R_{kl}^c(jh) + R_{kl}^s(jh)].$$

Беручи до уваги це рівняння, маємо:

$$b_{\xi}(nh, jh) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=-1}^1 [R_{kl}^c(jh) + R_{kl}^s(jh)] \cos[(l-k)\omega_0 t + (v_0 + l\omega_0)u].$$

Як бачимо, коефіцієнти Фур'є дисперсії сигналу

$$b_{\xi}(nh, 0) = B_0^{(\xi)}(0) + C_2^{(\xi)}(0) \cos 2\omega_0 nh$$

Визначаються сумою елементів діагоналей симетричної матриці $[R_{kl}(0)]_{2 \times 2}$

наступним чином:

$$B_0^{(\xi)}(0) = 2[R_{11}(0) + R_{-1,-1}(0)],$$

$$C_2^{(\xi)}(0) = 2|B_2^{(\xi)}(0)| = 2[R_{1,-1}(0) + R_{-1,1}(0)].$$

Результати розрахунку елементів матриці представлені на Рис. 5.4.10 у вигляді певної карти, де діаметр кожної кульки пропорційний модулю відповідної кореляції. Ця карта представляє відносний внесок модуляцій кожної гармоніки як в усереднену за часом дисперсію сигналу, так і в потужність часових змін дисперсії. Такий підхід дозволяє більш детально вивчити властивості джерела сигналу.

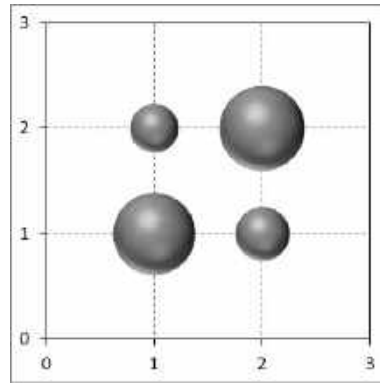


Рис. 5.4.10. Карта авто- та взаємо- кореляцій розділених компонент

Беручи до уваги залежності

$$R_{1,1}(0) = \frac{1}{4} [R_{\mu}^c(0) + R_{\mu}^s(0)],$$

$$R_{-1,-1}(0) = \frac{1}{4} [R_{\nu}^c(0) + R_{\nu}^s(0)],$$

$$R_{1,-1}(0) = \frac{1}{4} [R_{\mu\nu}^c(0) + R_{\mu\nu}^s(0)],$$

$$R_{-1,1}(0) = \frac{1}{4} [R_{\nu\mu}^c(0) + R_{\nu\mu}^s(0)],$$

І розраховуючи функції авто- та взаємної кореляції квадратур, маємо

$$\hat{B}_0^{(\xi)}(0) = \frac{1}{2} [\hat{R}_{\mu}^c(0) + \hat{R}_{\mu}^s(0) + \hat{R}_{\nu}^c(0) + \hat{R}_{\nu}^s(0)] = 6.15,$$

$$\hat{C}_2^{(\xi)}(0) = \frac{1}{2} [\hat{R}_{\nu\mu}^c(0) + \hat{R}_{\mu\nu}^c(0) + \hat{R}_{\nu\mu}^s(0) + \hat{R}_{\mu\nu}^s(0)] = 2.31.$$

Ці значення оцінок кореляційної складової несуттєво відрізняються від значень, отриманих за допомогою статистичних даних (5.4.7) та (5.4.8).

5.5. Висновки до розділу 5.

У розділі 5 розроблено модель ПНВС на основі перетворення Гільберта та аналітичного сигналу.

Проведено дослідження кореляційних та спектральних властивостей перетворення Гільберта гармонійного коливання, що є амплітудно-фазо-модульоване широкосмуговим стаціонарним випадковим процесом. Показано що у цьому випадку аналітичний сигнал є ПНВС. Показано, що для ПНВС з високочастотними модульованими гармоніками кореляційна структура перетворення Гільберта сигналу не змінюється порівняно з вихідним сигналом. Ця особливість сигналу була встановлена як для випадків моно- та багатокомпонентної ПНВС, так і для широкосмугової, вузькосмугової, амплітудної та амплітудно-фазової модуляції, тобто аналітичний сигнал є ПНВС у всіх випадках. Квадрат модуля, тобто сума квадратів сигналу та його перетворення Гільберта, є чисто випадковим сигналом, а отже методи гармонійного аналізу детермінованого сигналу недоцільно використовувати для пошуку періодичностей у такому ‘квадраті огинаючої’, оскільки результати такого аналізу стосовно чисто випадкового процесу не є слухними. Дисперсія аналітичного сигналу дорівнює подвоєній дисперсії вихідного сигналу, тому його аналіз не може дати нових результатів у порівнянні зі звичайним аналізом дисперсії необробленого сигналу.

Розглянуто процес смугової фільтрації високочастотного амплітудно-фазо-модульованого сигналу, і встановлено особливості залежності результатів його обробки від параметрів фільтра. Встановлено, що параметри фільтра ПНВС слід вибирати виходячи з величини взаємних кореляцій модуляцій сигналів а не їх потужності. Виконано аналіз вузькосмугово модульованого багатокомпонентного ПНВС, що представлений у вигляді суперпозиції стаціонарної та взаємно періодично нестаціонарної високочастотної складових і розглянуто властивості перетворення Гільберта сигналу та аналітичного сигналу, а також запропоновано методи розділення вузькосмугових високочастотних квадратур. У разі вузькосмугової модуляції сигнал може бути

представлений суперпозицією двох компонентів за Райсом, кожна з яких є стаціонарним випадковим процесом, однак ці компоненти є взаємно ПНВС. Взаємна кореляція цих компонентів призводить до періодичної нестаціонарності відповідного аналітичного сигналу. Коефіцієнти Фур'є кореляційних функцій компонентів визначаються взаємними кореляціями складових квадратур. Структура взаємної кореляції квадратур може мати специфічні особливості, характерні для різних джерел, які генерують ПНВС. Тобто взаємну кореляцію квадратур можна використовувати для розділення та ідентифікації джерел сигналу, наприклад, для визначення типу та локалізації дефекту механізму. За допомогою перетворення Гільберта можна виділити квадратури компонентів та оцінити їх авто- та взаємну кореляційну функції на основі отриманих часових рядів. За допомогою такого підходу також можуть досліджуватися і квадратури високочастотних коливань, які модулюють несучі гармоніки ПНВС. Для опису особливостей джерел, що генерують ПНВС корисно використовувати карти кореляцій.

Проведено верифікацію отриманих теоретичних результатів шляхом обробки симульованих часових рядів.

РОЗДІЛ 6

ВИЯВЛЕННЯ ТА ОЦІНЮВАННЯ РОЗВИТКУ ДЕФЕКТІВ НА ОСНОВІ АНАЛІЗУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

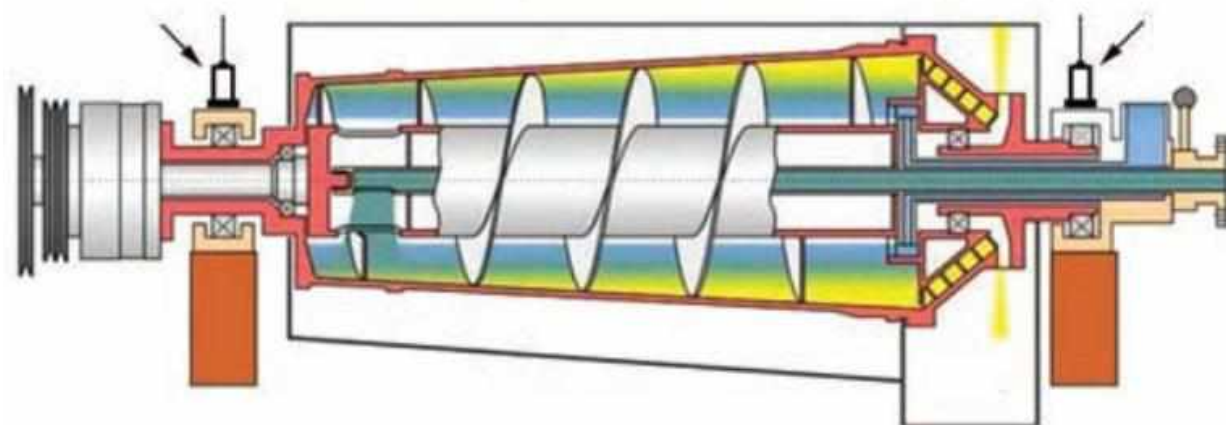
6.1. Аналіз вібраційного діагностичного ПНВС.

Виходячи з розроблених у попередніх розділах моделі ПНВС та підходу до аналізу високочастотного амплітудно- і фазо- модульованого сигналів, та роботах [213–218] пропонується наступний покроковий алгоритм обробки реальних часових послідовностей вібросигналів (Рис. 6.1.1).



Рис. 6.1.1. Блок-схема алгоритму обробки реальних часових послідовностей

Далі на основі цієї методики проведено аналіз вібрацій підшипникового вузла декантера Flottweg 24E. Схематично декантер показано на Рис. 6.1.2(а), реальне зображення механізму – на Рис. 6.1.2 (б). Метою аналізу була оцінка технічного стану декантера. Отримання, дискретизація та реєстрація сигналів віброприскорення забезпечувалися оригінальною системою збору даних “Компакт-Вібро” з п’єзокерамічними давачами віброприскорення типу АВС-117 [208, 223, 224]. Верхня межа пропускання низькочастотного фільтра аналогового сигналу була встановлена рівною 5 кГц, частота дискретизації сигналу - 10 кГц, довжина реалізації $T = 10$ сек. Фрагмент реалізації сигналу наведено на Рис. 6.1.3.



а)



б)

Рисунок 6.1.2. Декантер Flottweg: схема (а) і зображення (б). Стрілками показано розміщення давачів вібрації.

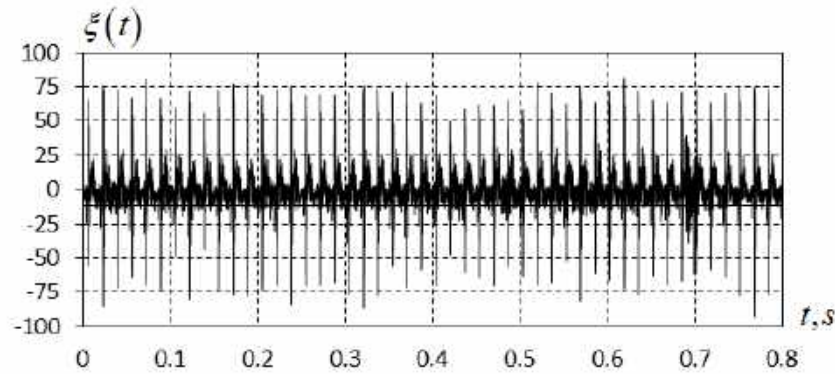


Рис.6.1.3. Фрагмент реалізації сигналу віброприскорення.

На першому етапі для вивчення загальних властивостей часової послідовності розраховані оцінки кореляційної функції та спектральної густини потужності для стаціонарного наближення ПНВС:

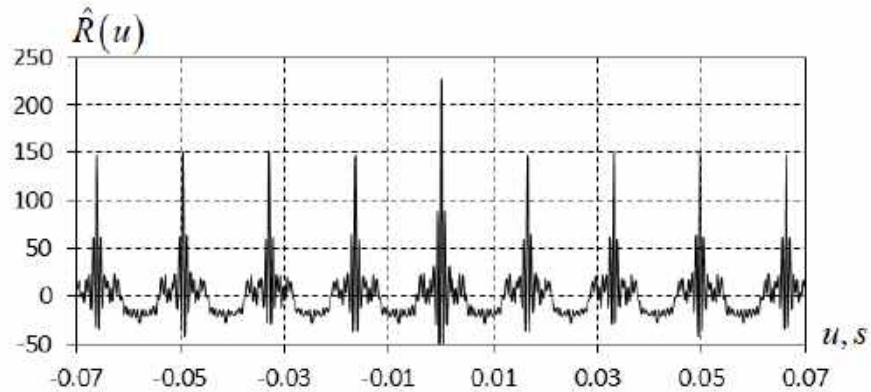
$$R(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} [\xi(nh) - \hat{m}] [\xi((n+j)h) - \hat{m}], \quad \hat{m} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi(nh), \quad (6.1.1)$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{h}{2\pi} \sum_{n=-L}^L k(nh) \hat{R}(nh) \cos \omega nh. \quad (6.1.2)$$

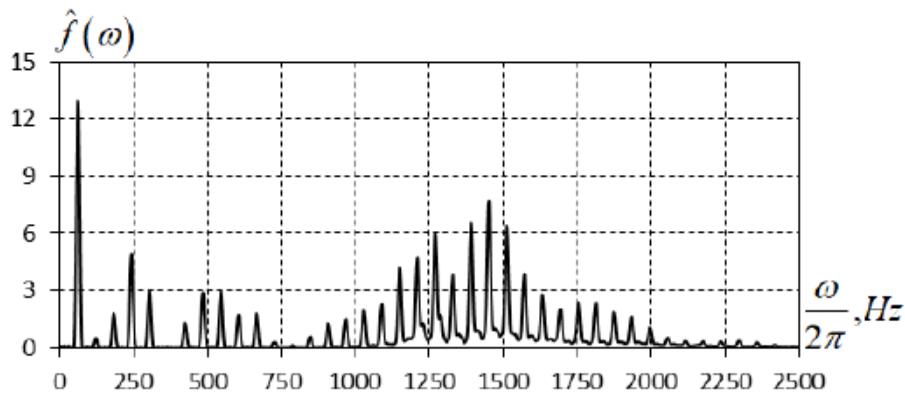
Тут j ціле число, $h = \frac{T}{K}$ інтервал вибірки, T тривалість у часі реалізації, K розмір вибірки (число відліків), $L = u_m / h$, u_m точка усічення корелограми, L розмір вікна кореляції.

Графіки оцінок кореляційної функції (6.1.1) та спектральної густини (6.1.2) наведені на Рис. 6.1.4. Наявність незатухаючого “хвоста” в оцінці кореляційної функції свідчить про наявність дискретних складових у спектральній густині сигналу, які представляються піками на деяких частотах [198, 216–222]. Виявлені піки також можуть бути результатом присутності у спектрі вузькосмугових стохастичних компонентів. Такий “мішаний” спектр є надто складним для безпосереднього аналізу, інтерпретації та отримання кількісних оцінок. Тому необхідно провести розділення неперервних і дискретних компонентів сигналу та їх окремий аналіз за допомогою відповідних методик. Зокрема, це важливо при моніторингу стану механізмів, оскільки дискретні та

безперервні компоненти у спектрі можуть бути викликані різними типами несправностей.



а)



б)

Рис.6.1.4. Оцінки кореляційної функції (а) і спектральної густини сигналу (б) у стаціонарному наближенні.

Для оцінки періоду функції математичного сподівання, що описує детерміновану компоненту сигналу, використаємо квадратичний функціонал [197]:

$$\hat{F}_1(\theta) = \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K \hat{m}^2(\theta, nh), \quad (6.1.3)$$

де

$$\hat{m}(\theta, nh) = \sum_{k=1}^{L_1} \left[\hat{m}_k^c(\theta) \cos k \frac{2\pi}{\theta} nh + \hat{m}_k^s(\theta) \sin k \frac{2\pi}{\theta} nh \right], \quad (6.1.4)$$

$$\begin{cases} \hat{m}_k^c(\theta) \\ \hat{m}_k^s(\theta) \end{cases} = \frac{2}{2K+1} \sum_{n=-K}^K \xi(nh) \begin{cases} \cos k \frac{2\pi}{\theta} nh \\ \sin k \frac{2\pi}{\theta} nh \end{cases}, \quad (6.1.5)$$

а θ є так званим пробним періодом. Похибок, що можуть бути викликані ефектом накладання першого та другого роду, можна уникнути [195, 210-212], якщо встановити величину періоду дискретизації h в (6.1.4) і (6.1.5) відповідно до нерівностей:

$$h \leq \frac{P}{2L_1+1}, \quad h \leq \frac{P}{2L_2+1},$$

тут L_1 and L_2 – номери найвищих гармонік відповідно функції математичного сподівання та кореляційної функції взяті до уваги. Слід зазначити, що величина пробного періоду θ в (6.1.4) і (6.1.5) може бути задана довільною, незалежно від величини періоду дискретизації h .

Графік залежності квадратичного функціоналу (6.1.3) від пробної частоти $f = 1/\theta$ для $L_1=40$ і $T=10$ с наведена на Рис. 6.1.5. Точка максимуму цієї залежності відповідає базовій частоті $\hat{f}_0 = 1/\hat{P}$. Визначене значення базової частоти з точністю до тисячних Гц рівне $\hat{f}_0 = 60.430$ Гц. Виходячи з цього значення основної частоти були розраховані величини косинусних та синусних коефіцієнтів Фур'є (6.1.5) і відповідні амплітуди гармонік регулярної складової.

$$A(k\hat{f}_0) = \sqrt{[\hat{m}_k^c(\hat{P})]^2 + [\hat{m}_k^s(\hat{P})]^2}$$

Амплітуди гармонік $\{A(k\hat{f}_0), k=\overline{1,40}\}$ представлені на Рис. 6.1.6 (б) у вигляді стовпчикової діаграми. Як бачимо, цей спектр регулярної складової досить широкий, він складається з сорока гармонік, що відповідає ширині смуги частот приблизно 2,5 кГц. На основі синусних і косинусних коефіцієнтів Фур'є (6.1.5) використовуючи інтерполяційну формулу [195]:

$$\hat{m}_\varepsilon(t, \hat{P}) = \hat{m}_0 + \sum_{k=1}^{L_1} \left[\hat{m}_k^c(\hat{P}) \cos k \frac{2\pi}{\hat{P}} t + \hat{m}_k^s(\hat{P}) \sin k \frac{2\pi}{\hat{P}} t \right]$$

можна розрахувати оцінку функції математичного сподівання для всіх $t \in [0, \hat{P}]$

(Рис. 6.1.6(а)).

Оцінку стохастичної складової сигналу отримуємо шляхом віднімання від сигналу розрахованої оцінки функції його математичного сподівання [208].

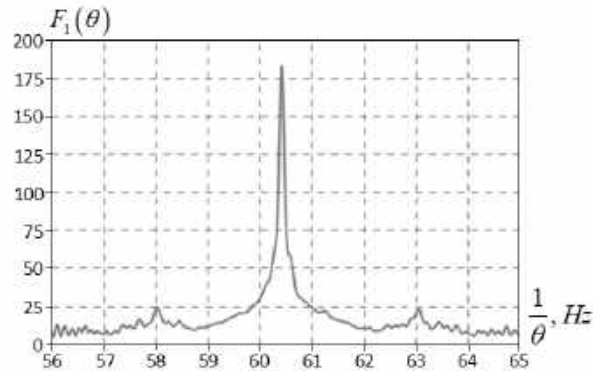
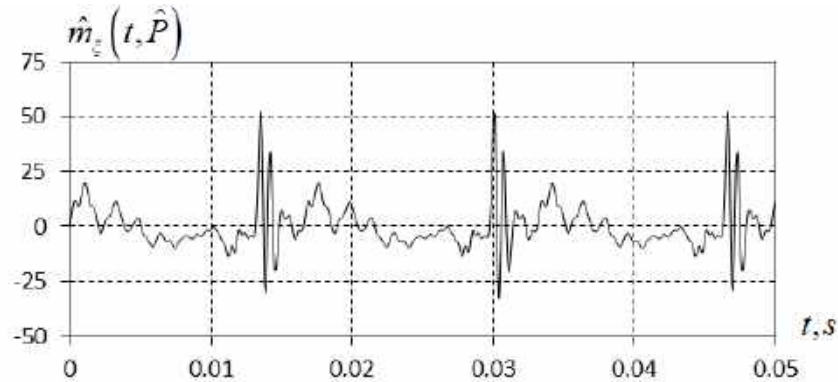
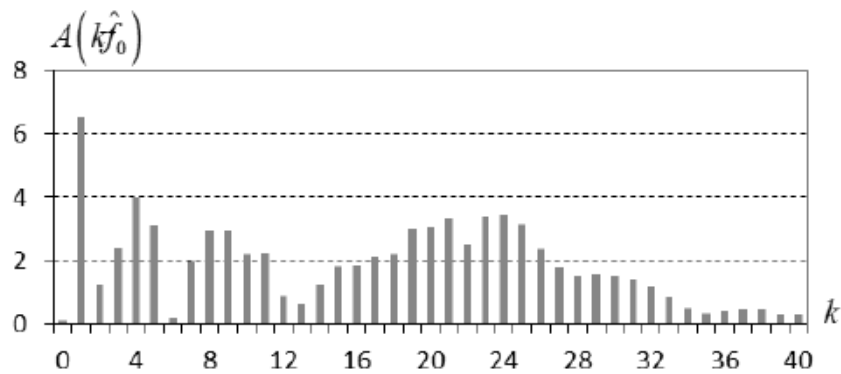


Рис. 6.1.5. Залежність квадратичного функціоналу математичного сподівання (6.1.3) від пробної частоти



а)



б)

Рис. 6.1.6. Оцінки: (а) - функції математичного сподівання; (б) її амплітудного спектру

Оцінка кореляційної функції стохастичної частини має вигляд повільно зникаючих груп коливань, що йдуть одна за одною з періодом базової частоти обертання (Рис. 6.1.7(а)). Величина оцінки зменшується до коливань малої потужності зі збільшенням часу затримки, отже можна зробити висновок, що детерміновані регулярні коливання були повністю вилучені з вібраційного сигналу. Оцінка спектральної густини стохастичної складової зосереджена в основному в інтервалі частот $[800\text{Hz}, 2400\text{Hz}]$ (Рис. 6.1.7(б)). Вона має гребінчасту структуру, різниця між частотами сусідніх піків якої близька до величини основної частоти.

Для виявлення прихованих періодичностей другого порядку використаємо квадратичний функціонал дисперсії [197, 206, 209]:

$$F_2(0, \theta) = \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K \hat{R}_\xi^2(nh, 0, \theta), \quad (6.1.6)$$

де

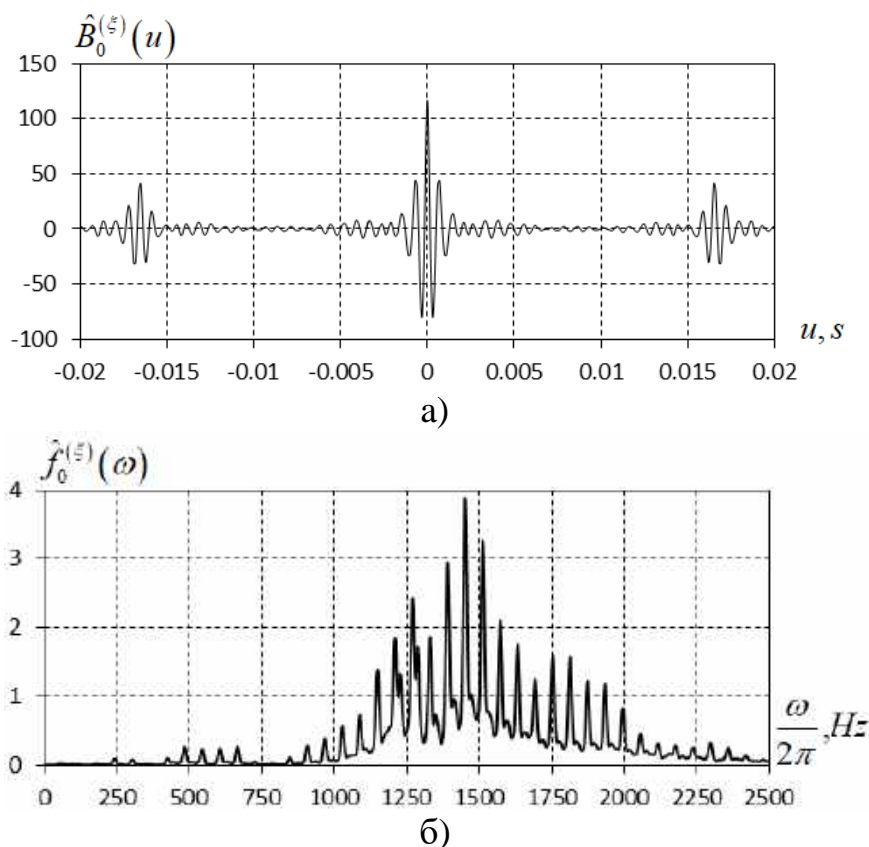


Рис. 6.1.7. Оцінки: (а) кореляційної функції; (б) спектральної густини потужності стохастичної складової сигналу

$$\hat{R}_\xi^2(nh, 0, \theta) = \sum_{k=1}^L \left[\hat{C}_k^{(\xi)}(jh, \theta) \cos k \frac{2\pi}{\theta} nh + \hat{S}_k^{(\xi)}(jh, \theta) \sin k \frac{2\pi}{\theta} nh \right],$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_k^{(\xi)}(jh, \theta) \\ \hat{S}_k^{(\xi)}(jh, \theta) \end{array} \right\} = \frac{2}{2K+1} \sum_{n=-K}^K [\xi(nh) - \hat{m}(nh)] \times$$

$$\times \left[\xi((n+j)h) - \hat{m}((n+j)h) \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos k \frac{2\pi}{\theta} nh \\ \sin k \frac{2\pi}{\theta} nh \end{array} \right\}. \quad (6.1.7)$$

Оцінку періоду дисперсії знаходимо як точку максимуму статистики (6.1.6) в залежності від пробного періоду θ . Похибки накладання першого та другого роду відсутні [195], якщо період дискретизації задовольняє нерівність

$$h \leq \frac{P}{4L_2 + 1}. \quad (6.1.8)$$

Величина (6.1.6) у точці $\theta = \hat{P}$ є близькою до усередненого за часом значення $\hat{R}_\xi^2(nh, 0, \theta)$:

$$F_2(0, \hat{P}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L_2} [\hat{C}_k^{(\xi)}(jh, \theta) + \hat{S}_k^{(\xi)}(jh, \theta)]$$

Ця величина визначає сумарну потужність гармонік дисперсії. Для розрахунку оцінки дисперсії було використано статистику:

$$\hat{b}_\xi(t, 0, \hat{P}) = \hat{B}_0^{(\xi)}(0) + \sum_{k=1}^{L_2} \left[[\hat{C}_k^{(\xi)}(0, \hat{P})]^2 \cos k \frac{2\pi}{\hat{P}} t + [\hat{S}_k^{(\xi)}(0, \hat{P})]^2 \sin k \frac{2\pi}{\hat{P}} t \right]. \quad (6.1.9)$$

Тут

$$\hat{B}_0^{(\xi)}(0) = \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K [\xi(nh) - \hat{m}(nh)]^2. \quad (6.1.10)$$

Якщо умова (6.1.8) виконується, то вираз (6.1.9) є інтерполяційною формулою, що дозволяє обчислити значення оцінки функції дисперсії у межах періоду для всіх $t \in [0, \hat{P}]$ [195].

Графік залежності функціоналу (6.1.6) від пробної частоти $f = 1/\theta$ розрахований для числа гармонік $L_2=40$ представлений на Рис. 6.1.8. Точка максимуму, тобто оцінка базової частоти відповідає $\hat{f}_0 = 60.420 \text{ Hz}$.

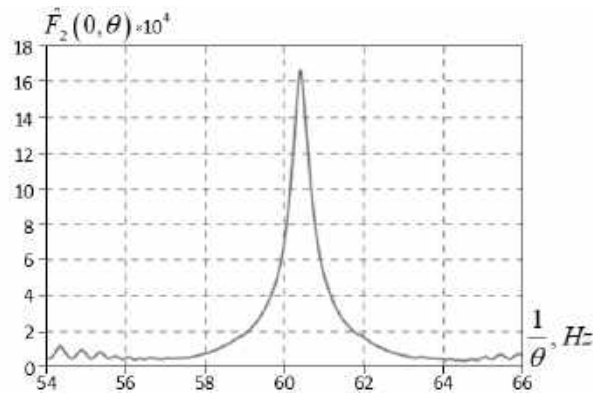


Рис. 6.1.8. Залежність квадратичного функціоналу дисперсії (6.1.6) від пробної частоти

Оцінка амплітудного спектру дисперсії

$$V(k\hat{f}_0) = \sqrt{\left[C_k^{(\xi)}(0, \hat{P}) \right]^2 + \left[S_k^{(\xi)}(0, \hat{P}) \right]^2}$$

представлено на Рис. 6.1.9(б) у вигляді стовпчикової діаграми. Цей спектр суттєво вузьчий за спектр детермінованих коливань, для оцінки дисперсії достатньо врахувати лише від 25 до 27 гармонік з огляду на потужність гармонік у спектрі. Амплітуди $V(k\hat{f}_0)$ визначаються кореляціями гармонік спектру, частоти яких зміщені на $k\hat{f}_0$ [123].

На Рис. 6.1.9 (а) представлена залежність від часу оцінки функції дисперсії (6.1.9). Вона має форму коротких потужних імпульсів, що слідують один за одним з інтервалом базового періоду. Виявлені особливості залежності від часу дисперсії та її амплітудний спектр свідчать про значне пошкодження досліджуваного механізму.

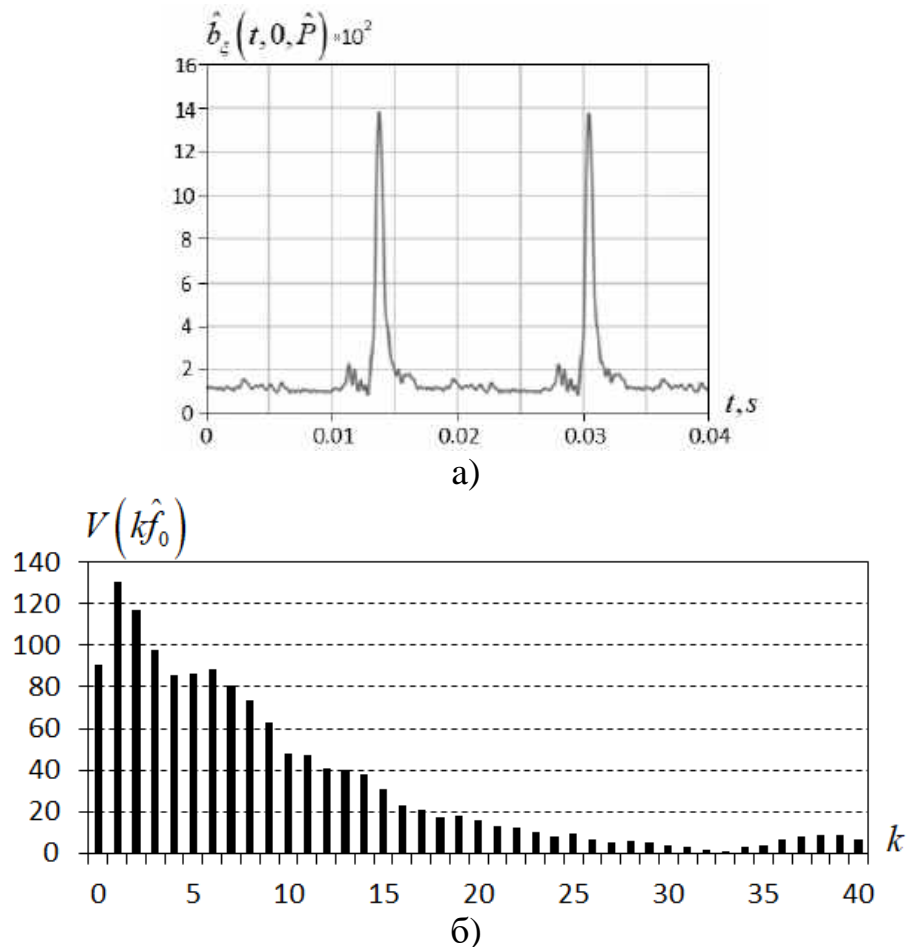


Рис. 6.1.9. Оцінка функції дисперсії (а) і її амплітудний спектр (б)

Результати оцінки функції дисперсії та її амплітудного спектру для перетворення Гільберта від стохастичної частини сигналу показали, що значення цієї оцінки відрізняються від значення для стохастичної частини сигналу лише в третій цифрі після коми. Таким чином, ми можемо припустити, що ці величини однакові. Тоді дисперсія аналітичного сигналу дорівнює подвоєній дисперсії сигналу і його аналіз не може дати жодних нових результатів у порівнянні з аналізом дисперсії сигналу [200].

У цьому випадку стохастичний сигнал може бути представлений суперпозицією ПНВС несучих гармонік, які є високочастотними та вузькосмугово модульованими. Властивості цієї модуляції буде проаналізовано за допомогою смугової фільтрації та перетворення Гільберта відповідно до алгоритму Рис. 6.1.1.

Спочатку за допомогою смугової фільтрації виділимо три спектральні складові - складову, що має максимальне пікове значення та її правий та лівий сусідні максимуми (Рис. 6.1.10). Частота максимального піка становить $\lambda_0 = 1453 \text{ Hz}$. Представляємо кожен з трьох виділених частотних складових формулами Райса:

$$\xi_0(nh) = \mu_0^c(nh) \cos 2\pi\lambda_0 nh + \mu_0^s(nh) \sin 2\pi\lambda_0 nh, \quad (6.1.11)$$

$$\xi_0^+(nh) = \mu_1^c(nh) \cos 2\pi\lambda_1^+ nh + \mu_1^s(nh) \sin 2\pi\lambda_1^+ nh, \quad (6.1.12)$$

$$\xi_0^-(nh) = \mu_{-1}^c(nh) \cos 2\pi\lambda_1^- nh + \mu_{-1}^s(nh) \sin 2\pi\lambda_1^- nh, \quad (6.1.13)$$

де $\lambda_1^+ = \lambda_0 + f_0$, $\lambda_1^- = \lambda_0 - f_0$. Оцінки кореляційних функцій для кожної складової у стаціонарному наближенні мають вигляд повільно затухаючих коливань (Рис. 6.1.11(a)). Оцінки спектральної густини відповідно мають різкі піки на частотах λ_0 , λ_1^+ і λ_1^- . Величини оцінок ненульових кореляційних компонент для кожної складової є незначними (Рис. 6.1.11 (б, в)), тому їх можна розглядати як стаціонарні випадкові процеси [208-213].

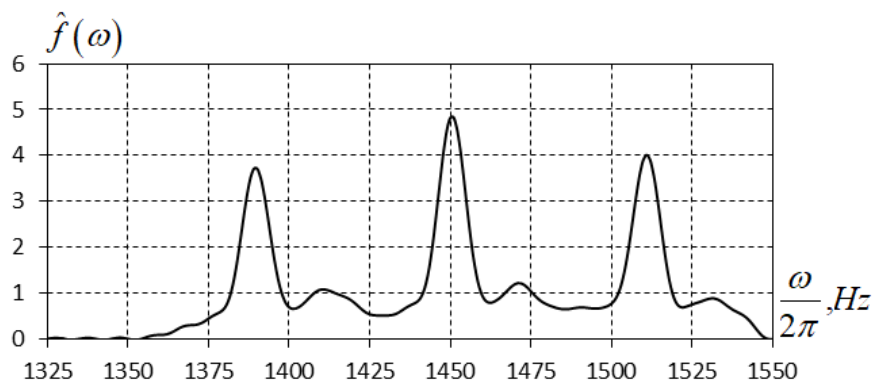


Рис. 6.1.10. Спектральна густина потужності відфільтрованої смуги сигналу

Проте результати обробки статистики, що є сумою (6.1.11)–(6.1.13), показують, що ці компоненти є взаємно періодично нестационарними процесами.

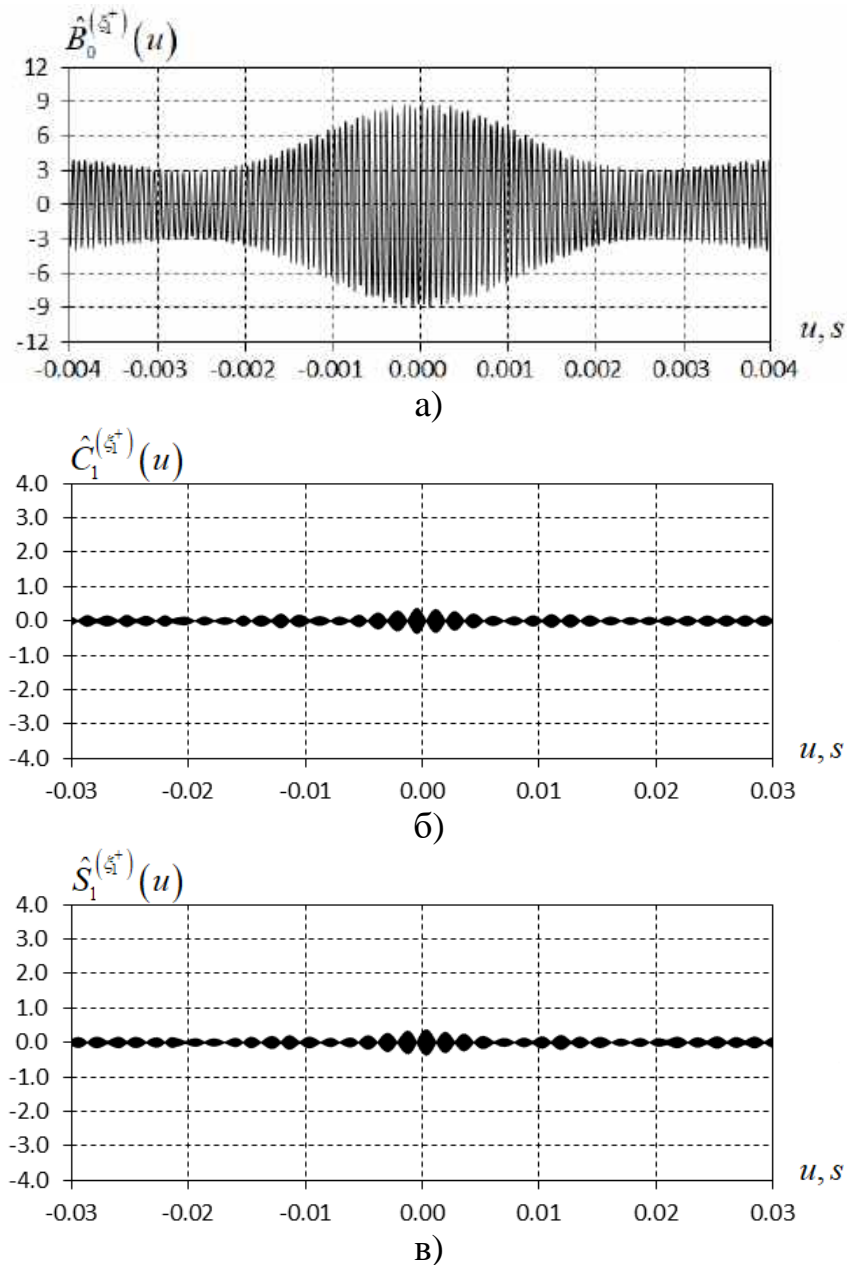


Рис. 6.1.11. Оцінки кореляційних компонентів фільтрованої складової $\xi_1^+(nh)$

: $\hat{B}_0^{(\xi_1^-)}(u)$ (а), $\hat{C}_1^{(\xi_1^+)}(u)$ (б) і $\hat{S}_1^{(\xi_1^+)}(u)$ (в).

Нульова кореляційна компонента суми визначається шляхом додавання кореляційних функцій всіх трьох складових і має групову структуру (Рис. 6.1.12(а), що можна пояснити близькістю їх частот. Подібні форми мають оцінки першої (Рис. 6.1.12(б, в)) та другої (Рис. 6.1.13(а, б)) кореляційних компонент. Перша компонента визначається кореляцією процесів $\xi_0(t)$ і $\xi_1^+(t)$ а також $\xi_0(t)$ і $\xi_1^-(t)$. Друга компонента визначається кореляцією $\xi_1^-(t)$ і $\xi_1^+(t)$. Величини третьої і вищих кореляційних компонент є мізерно малі (Рис. 6.1.14),

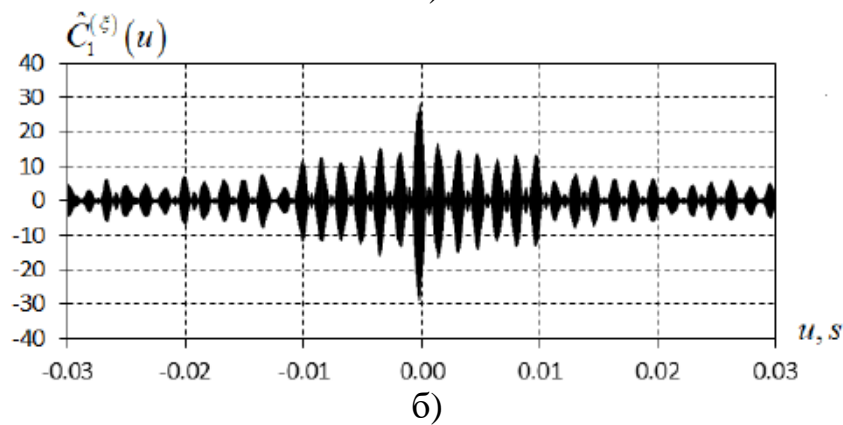
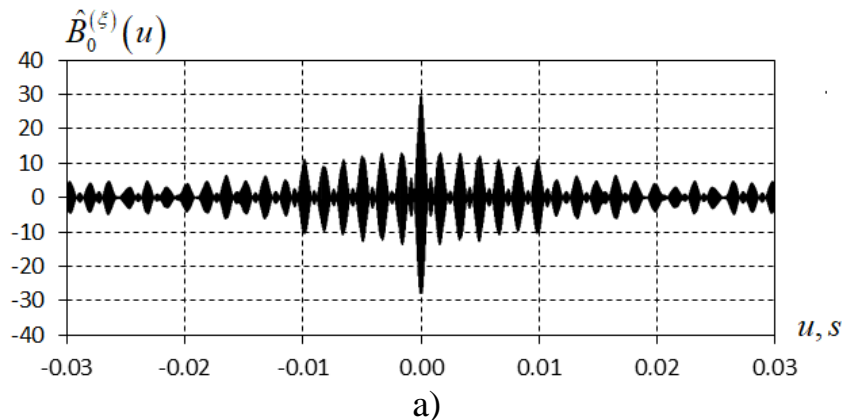
оскільки складові спектру сигналу, частоти яких зміщені на kf_0 , $k \geq 3$, практично відсутні у відфільтрованому сигналі. Амплітудний спектр функції дисперсії суми (6.1.11)–(6.1.13) представлено на Рис. 6.1.15 (а). Міра нестационарності сигналу, визначена як $I = \sum_{k=1}^2 |\hat{B}_k(0)| / \hat{B}_0(0)$ для цього випадку рівна 0,832.

Для більш детального аналізу кореляційної структури сумарного процесу застосуємо перетворення Гільберта до трьох відфільтрованих сигналів:

$$\eta_0(nh) = \mu_0^c(nh) \sin 2\pi\lambda_0 nh - \mu_0^s(nh) \cos 2\pi\lambda_0 nh,$$

$$\eta_1^+(nh) = \mu_1^c(nh) \sin 2\pi\lambda_1^+ nh - \mu_1^s(nh) \cos 2\pi\lambda_1^+ nh,$$

$$\eta_1^-(nh) = \mu_{-1}^c(nh) \sin 2\pi\lambda_1^- nh - \mu_{-1}^s(nh) \cos 2\pi\lambda_1^- nh.$$



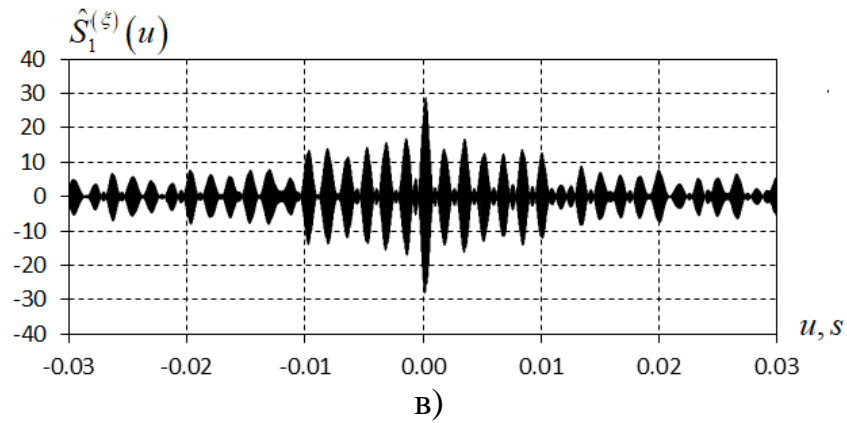


Рис. 6.1.12. Оцінки нульової $\hat{B}_0^{(\xi)}(u)$ (а) і першої косинусної $\hat{C}_1^{(\xi)}(u)$ (б) та синусної $\hat{S}_1^{(\xi)}(u)$ (в) кореляційних компонент трикомпонентного сигналу

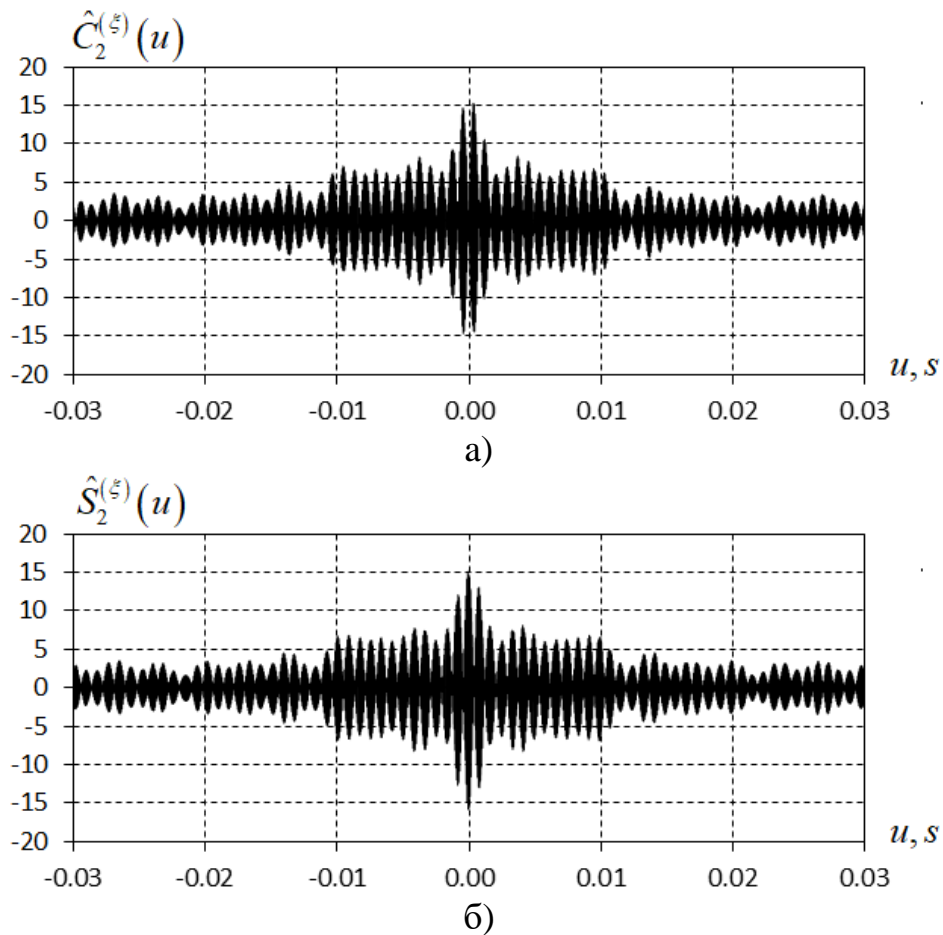


Рис. 6.1.13. Оцінки другої косинусної $\hat{C}_2^{(\xi)}(u)$ (а) і синусної $\hat{S}_2^{(\xi)}(u)$ (б) кореляційних компонент трикомпонентного сигналу

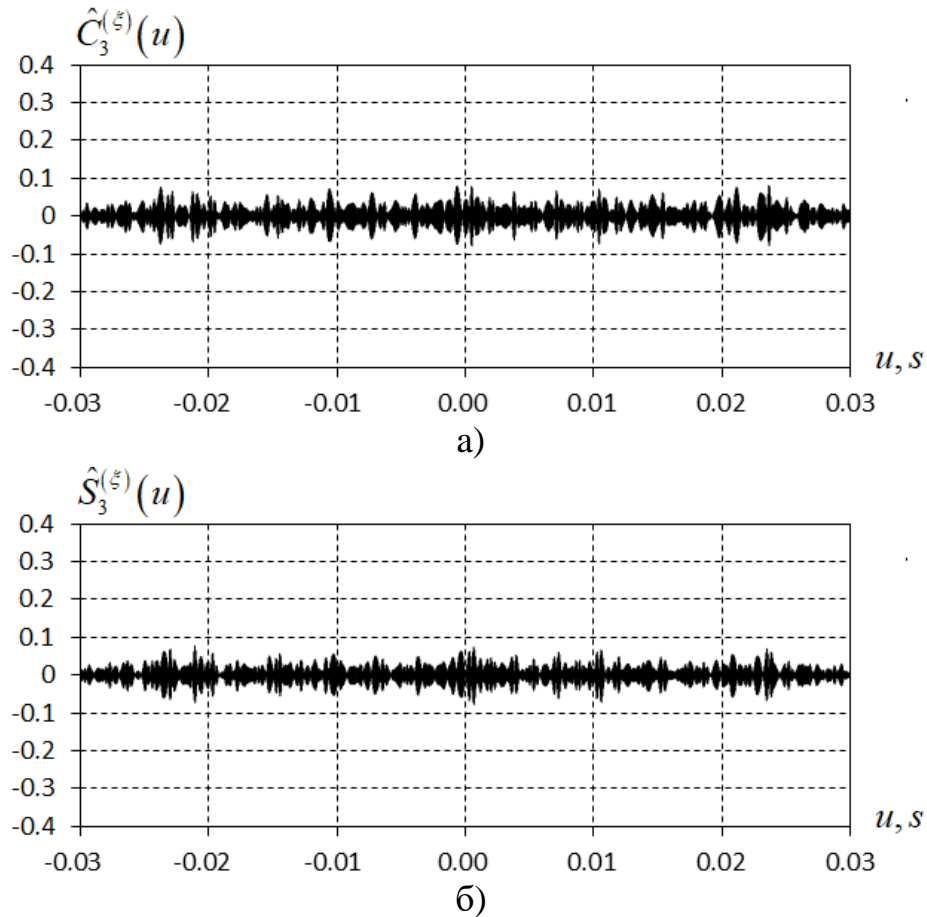


Рис. 6.1.14. Оцінки третьої косинусної $\hat{C}_3^{(\xi)}(u)$ (а) і синусної $\hat{S}_3^{(\xi)}(u)$ (б) кореляційних компонент трикомпонентного сигналу

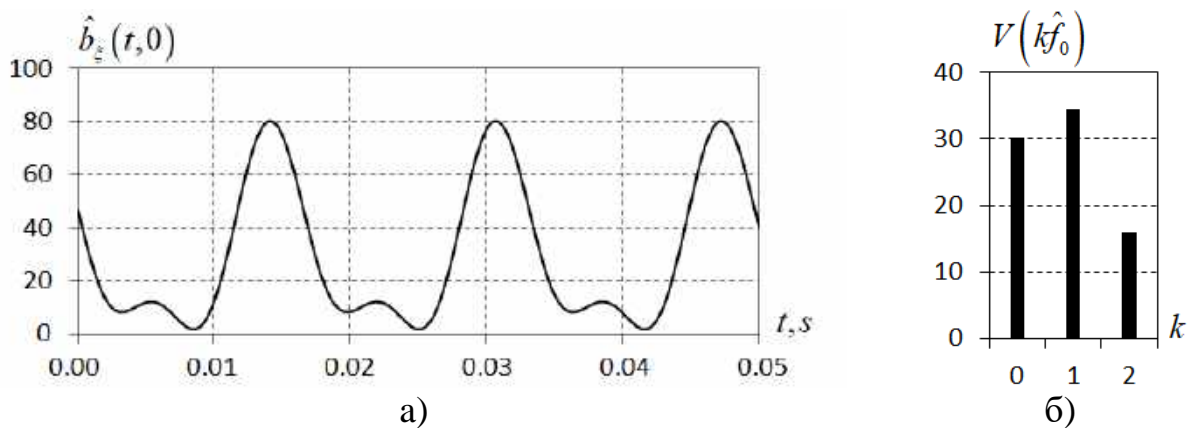


Рис. 6.1.15. Оцінка функції дисперсії (а) та амплітудний спектр (б) трикомпонентного сигналу

Визначимо квадратурні компоненти окремих модулюючих складових:

$$\mu_0^c(nh) = \xi_0(nh) \cos 2\pi\lambda_0 nh + \eta_0(nh) \sin 2\pi\lambda_0 nh, \quad (6.1.14)$$

$$\mu_0^s(nh) = \xi_0(nh) \sin 2\pi\lambda_0 nh - \eta_0(nh) \cos 2\pi\lambda_0 nh, \quad (6.1.15)$$

$$\mu_1^c(nh) = \xi_1^+(nh) \cos 2\pi\lambda_1^+ nh + \eta_1^+(nh) \sin 2\pi\lambda_1^+ nh, \quad (6.1.16)$$

$$\mu_1^s(nh) = \xi_1^+(nh) \sin 2\pi\lambda_1^+ nh - \eta_1^+(nh) \cos 2\pi\lambda_1^+ nh, \quad (6.1.17)$$

$$\mu_{-1}^c(nh) = \xi_1^-(nh) \cos 2\pi\lambda_1^- nh + \eta_1^-(nh) \sin 2\pi\lambda_1^- nh, \quad (6.1.18)$$

$$\mu_{-1}^s(nh) = \xi_1^-(nh) \sin 2\pi\lambda_1^- nh - \eta_1^-(nh) \cos 2\pi\lambda_1^- nh. \quad (6.1.19)$$

Отримані на основі співвідношень (6.1.14)–(6.1.19) квадратурні реалізації були використані для їх авто- та взаємо-кореляційного аналізу модулюючих складових. Залежності автокореляційних функцій квадратур від часу затримки є подібними для всіх трьох спектральних компонент. Всі вони мають форму повільно зникаючих низькочастотних коливань (Рис. 6.1.16). Автокореляційні функції косинусної та синусної квадратур дещо відрізняються, що підтверджує стаціонарність кожної компоненти. Оцінки спектральних густин потужності квадратур представлені на Рис. 6.1.17. Вони також швидко зникають, хоча спостерігається незначний підйом на частотах 10–20 Гц. Це може означати, що модулюючий сигнал містить коливання з близькими власними частотами, що відповідають власним резонансним частотам елементів декантера.

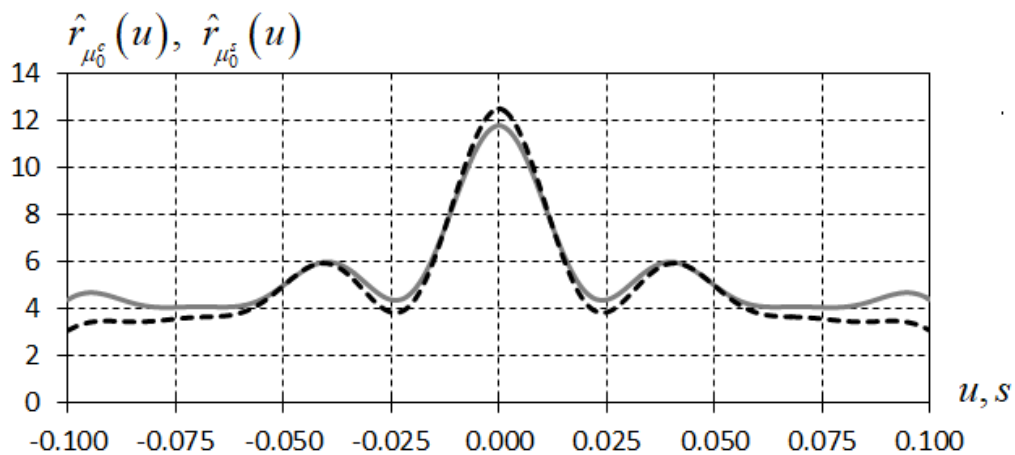


Рис. 6.1.16. Автокореляційні функції квадратур центральної смуги сигналу.
(— косинусна, – – синусна)

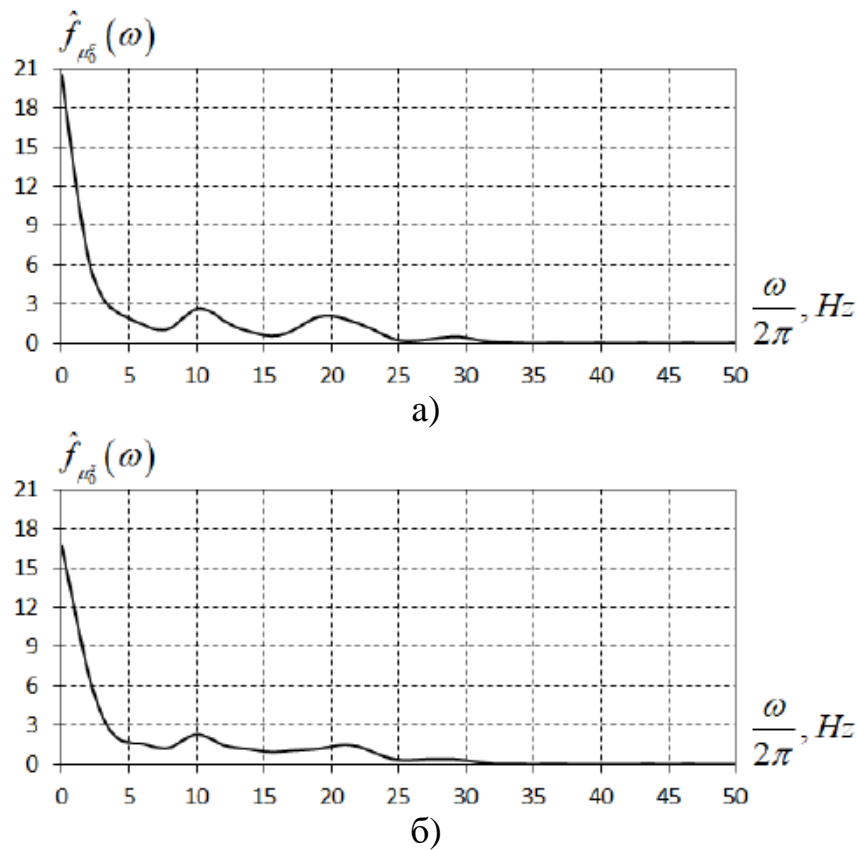


Рис. 6.1.17. Спектральна густина потужності косинусної (а) і синусної (б) квадратур центральної спектральної смуги сигналу

Взаємні кореляції квадратур виділених частотних компонент можна описати взаємокореляційними функціями взаємно стаціонарних випадкових послідовностей:

$$\mu_0(nh) = \frac{1}{2} [\mu_0^c(nh) - i\mu_0^s(nh)], \quad (6.1.20)$$

$$\mu_{-1}(nh) = \frac{1}{2} [\mu_{-1}^c(nh) - i\mu_{-1}^s(nh)], \quad (6.1.21)$$

$$\mu_1(nh) = \frac{1}{2} [\mu_1^c(nh) - i\mu_1^s(nh)], \quad (6.1.22)$$

Для модулів взаємокореляційних функцій статистик (6.1.20)–(6.1.22) маємо:

$$|R_{k_1}^{(\mu)}(u)| = \frac{1}{4} \left[[r_{k_1}^c(u) + r_{k_1}^s(u)]^2 + [r_{k_1}^{cs}(u) - r_{k_1}^{sc}(u)]^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.1.23)$$

Результати розрахунку оцінок $|\hat{R}_{k_1}^{(\mu)}(0)|$ на основі квадратурних реалізацій представлені в Табл. 6.1.1 та на Рис. 6.1.18 у вигляді карти кореляцій. Подвоєна сума елементів головної (нульової) діагоналі Табл. 6.1.1, які визначаються автокореляційними функціями (6.1.20)–(6.1.22), дорівнює 30,004. Отримана величина незначно відрізняється від нульової складової кореляції (30,139), отриманої за допомогою статистики (6.1.9). Цей результат також добре узгоджується з оцінкою яка була отримана для нульової складової кореляційної функції аналітично за формулою (5.3.132). Сума елементів першої діагоналі дорівнює $\hat{S}_1=17.112$, а сума решти елементів дорівнює $\hat{S}_2=7.852$. Розрахунок компонентів кореляції за допомогою статистики (6.1.9) для $\theta=2\pi\hat{f}_0$ дає $|\hat{B}_1(0)|=17.187$ і $|\hat{B}_2(0)|=7.952$. Відмінності між \hat{S}_1 і $\hat{B}_1(0)$ та \hat{S}_2 і $\hat{B}_2(0)$ є незначними, у межах допустимої похибки розрахунків оцінок. Це означає, що рівність використану як припущення $r_1^{cs}(0)-r_2^{cs}(0)=0$, у теоретичній частині дослідження, можна вважати вірною.

Таблиця 6.1.1. Величини кореляцій для трьох спектральних компонент сигналу

$\begin{matrix} l & k \\ \hline \end{matrix}$	-1	0	1
1	3.926	4.536	4.953
0	4.020	5.644	4.536
-1	4.405	4.020	3.926

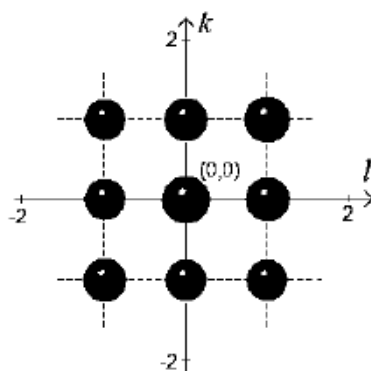


Рис.6.1.18. Карта кореляцій трьох спектральних компонент сигналу

Розглянемо тепер сигнал, спектральна густина якого лежить у смузі $[850 \text{ Hz}, 2030 \text{ Hz}]$ з центральною частотою $\lambda_0 = 1453 \text{ Hz}$. Ця смуга складається з 19 високочастотних компонентів (по дев'ять зліва і справа від центральної компоненти). Цей сигнал охоплює майже всю частотну область стохастичної складової сигналу. Значення кореляцій $|R_{kl}^{(\mu)}(0)|$ для $k, l = \overline{-9, 9}$ наведені в Табл. 6.1.2, а відповідна карта кореляцій показана на Рис. 6.1.19. Елементи $R_{kk}^{(\mu)}(0)$ на головній діагоналі відповідають потужності окремих компонентів (автокореляції) Елементи на бокових діагоналях $|R_{kl}^{(\mu)}(0)|$ з номерами $r = |k - l|$ показують взаємні кореляції компонентів, несучі частоти яких зсунуті на rf_0 . Подвоєна сума елементів головної (нульової) діагоналі

$$\hat{S}_0 = 2 \sum_{k=-9}^9 |R_{kl}^{(\mu)}(0)|$$

дорівнює сумарній потужності всіх модулюючих процесів.

Подвоєна сума елементів r -ї бічної діагоналі,

$$S_r = 2 \left[\sum_{l=r-9}^9 |\hat{R}_{l-r,l}^{(\mu)}(0)| + \sum_{l=9}^{9-r} |\hat{R}_{l+r,l}^{(\mu)}(0)| \right]$$

як це випливає з формули (5.4.48), визначає амплітуду r -ї гармоніки дисперсії багатокомпонентного ПНВС.

Аналізуючи числові значення взаємних кореляцій, наведені в Табл. 6.1.2 та відповідну карту кореляцій (Рис. 6.1.19), можна зробити висновок, що найбільш корельовані компоненти зосереджені навколо головної діагоналі та координатних осей, де значення взаємних кореляцій ближніх гармонік є домінуючими. Взаємні кореляції зменшуються зі збільшенням різниці частот між гармоніками, і вони є найслабшими для тих компонентів, які знаходяться на протилежних краях заданої смуги пропускання сигналу. Це більш чітко видно з даних Табл. 6.1.3, в якій представлені нормалізовані коефіцієнти кореляції. Як бачимо, значення для компонентів, несучі частоти яких близькі до

правої межі смуги, є більшими за 0,9, а до лівої – біля 0,9. Навколо осей координат нормовані кореляції змінюються в інтервалі $[0,75...0,85]$. Біля лівого верхнього та правого нижнього кутів маємо найменші значення, рівні приблизно 0,5. Вони визначають нормалізовані кореляції максимально віддалених компонентів. Оскільки нормалізовані коефіцієнти кореляції не зменшуються, коли їхні несучі частоти наближаються до меж смуги сигналу то, необхідно запропонувати інші оцінки для правильного вибору параметрів смуги фільтрації вхідного сигналу. Для з'ясування зв'язку між смугою фільтрації та амплітудним спектром дисперсії вихідного сигналу розглянемо інший випадок фільтрації. Розглядаючи вище вихідний ПНВС з трьома компонентами, ми виявили, що значення амплітуд гармонік, які були розраховані безпосередньо на основі реалізації за формулою (5.4.20) і подвійних сум елементів для відповідних діагоналей матриці відрізняються несуттєво. Цей результат не суперечить теоретичному, який був отриманий при припущенні, що модулюючі вузькосмугові процеси взаємно стаціонарні.

Тепер перевіримо справедливість цих рівностей, розглядаючи 11-компонентний вихідний сигнал. Результати розрахунків наведені в Табл. 6.1.4. З наведених значень $\hat{V}(rf_0)$ і \hat{S}_r видно, що вони відрізняються незначно. Невелику різницю між ними можна пояснити похибками обчислень. Отже, у подальших міркуваннях можна вважати подвійні суми елементів r -х бічних діагоналей амплітудами r -х гармонік дисперсії.

Часова залежність функції дисперсії для 11-компонентного ПНВС та її амплітудний спектр показані на Рис. 6.1.20. Амплітуди перших гармонік значно більші порівняно з Рис. 6.1.15. Графік дисперсії має вигляд періодичної послідовності імпульсів з різкими і високими піками. Величина оцінки нестаціонарності дорівнює $I = 3.648$, тобто значно більша, ніж для трикомпонентного сигналу. Це означає, що сумарні взаємні кореляції компонентів, які визначають амплітуди гармонік, зростають швидше, ніж їх сумарна потужність, що дозволило запропонувати і побудувати на їх основі

індикатори ступеня розвитку дефекту [198, 208]. Порівняємо зміни цих величин для інших смуг фільтрації. У Табл. 6.1.5 наведено величини амплітуд гармонік дисперсії для вхідних сигналів з різними смугами пропускання. Як бачимо, амплітуда суттєво зростає зі зростанням смуги пропускання сигналу, причому значення для деяких із них збільшуються більш ніж у десять разів у порівнянні з початковими величинами. Значення нестаціонарності зростає від 0,832 для 3-компонентного сигналу до 6,11 для 19-компонентного (Табл. 6.1.5) [208].

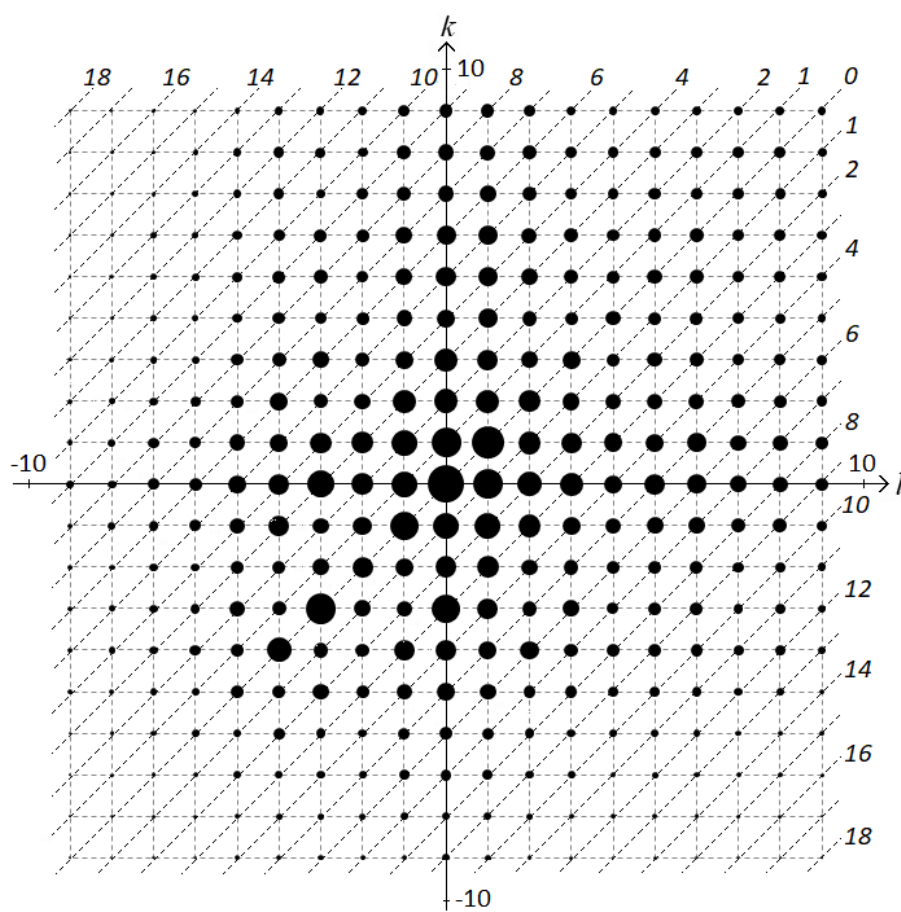


Рис. 6.1.19. Карта кореляцій $\hat{R}_{kl}^{(\mu)}(0)$ для сигналу з 19 компонент

Таблиця 6.1.2. Величини кореляцій $|\hat{R}_{kl}^{(\mu)}(0)|$ високочастотних складових.

$l \backslash k$	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0.32	0.43	0.60	0.67	0.95	1.22	1.21	1.34	1.70	2.02	1.99	1.73	1.49	1.34	1.39	1.49	1.38	1.37	1.32
8	0.42	0.56	0.75	0.88	1.20	1.62	1.57	1.54	2.16	2.48	2.35	2.06	1.78	1.59	1.75	1.78	1.62	1.76	1.37
7	0.44	0.60	0.77	0.88	1.23	1.60	1.51	1.67	2.20	2.50	2.48	2.13	1.86	1.67	1.83	1.86	1.82	1.62	1.38
6	0.52	0.69	0.93	1.05	1.49	1.79	1.93	1.97	2.52	2.95	2.89	2.36	2.13	1.92	2.08	2.19	1.86	1.78	1.49
5	0.55	0.72	0.96	1.16	1.58	2.02	2.05	1.86	2.59	3.07	2.84	2.44	2.24	1.93	2.29	2.08	1.83	1.75	1.39
4	0.52	0.67	0.92	1.08	1.43	1.86	1.75	1.95	2.49	2.76	2.89	2.30	1.97	2.22	1.93	1.92	1.67	1.59	1.34
3	0.64	0.83	1.11	1.27	1.81	2.12	2.54	2.22	2.68	3.58	3.12	2.65	2.81	1.97	2.24	2.13	1.86	1.78	1.49
2	0.71	0.96	1.26	1.50	1.95	2.79	2.23	2.44	3.43	3.71	3.49	3.36	2.65	2.30	2.44	2.36	2.13	2.06	1.73
1	0.94	1.18	1.59	1.75	2.51	2.84	3.22	3.36	3.92	4.54	4.95	3.49	3.12	2.89	2.84	2.89	2.48	2.35	1.99
0	1.07	1.30	1.75	1.97	2.88	3.11	4.18	3.31	4.02	5.64	4.54	3.71	3.58	2.76	3.07	2.95	2.50	2.48	2.02
-1	0.89	1.20	1.53	1.78	2.31	3.25	2.48	2.83	4.41	4.02	3.92	3.43	2.68	2.49	2.59	2.52	2.20	2.16	1.70
-2	0.76	0.94	1.22	1.30	1.92	2.07	2.56	3.11	2.83	3.31	3.36	2.44	2.22	1.95	1.86	1.97	1.67	1.54	1.34
-3	0.90	0.98	1.29	1.43	2.44	2.18	4.59	2.56	2.48	4.18	3.22	2.23	2.54	1.75	2.05	1.93	1.51	1.57	1.21
-4	0.80	1.01	1.25	1.75	1.95	3.73	2.18	2.07	3.25	3.11	2.84	2.79	2.12	1.86	2.02	1.79	1.60	1.62	1.22
-5	0.71	0.83	1.10	1.23	2.04	1.95	2.44	1.92	2.31	2.88	2.51	1.95	1.81	1.43	1.58	1.49	1.23	1.20	0.95
-6	0.52	0.64	0.82	1.12	1.23	1.75	1.43	1.30	1.78	1.97	1.75	1.50	1.27	1.08	1.16	1.05	0.88	0.88	0.67
-7	0.46	0.56	0.76	0.82	1.10	1.25	1.29	1.22	1.53	1.75	1.59	1.26	1.11	0.92	0.96	0.93	0.77	0.75	0.60
-8	0.36	0.49	0.56	0.64	0.83	1.01	0.98	0.94	1.20	1.30	1.18	0.96	0.83	0.67	0.72	0.69	0.60	0.56	0.43
-9	0.35	0.36	0.46	0.52	0.71	0.80	0.90	0.76	0.89	1.07	0.94	0.71	0.64	0.52	0.55	0.52	0.44	0.42	0.32

Таблиця 6.1.3. Величини нормалізованих коефіцієнтів кореляції $|\hat{R}_{kl}^{(\mu)}(0)| / \sqrt{\hat{R}_{kk}^{(\mu)}(0)\hat{R}_{ll}^{(\mu)}(0)}$ високочастотних складових.

$l \backslash k$	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0.47	0.54	0.60	0.55	0.58	0.55	0.49	0.66	0.71	0.74	0.78	0.82	0.77	0.78	0.80	0.88	0.89	0.94	1.00
8	0.54	0.60	0.65	0.62	0.63	0.63	0.55	0.66	0.78	0.79	0.79	0.85	0.80	0.81	0.87	0.91	0.90	1.00	0.94
7	0.55	0.63	0.66	0.62	0.64	0.62	0.52	0.70	0.78	0.78	0.82	0.86	0.82	0.83	0.90	0.93	1.00	0.90	0.89
6	0.59	0.66	0.72	0.67	0.71	0.63	0.61	0.75	0.81	0.84	0.88	0.87	0.86	0.87	0.93	1.00	0.93	0.91	0.88
5	0.62	0.68	0.73	0.72	0.73	0.69	0.63	0.70	0.82	0.85	0.84	0.88	0.88	0.86	1.00	0.93	0.90	0.87	0.80
4	0.59	0.64	0.71	0.68	0.67	0.65	0.55	0.74	0.80	0.78	0.87	0.84	0.79	1.00	0.86	0.87	0.83	0.81	0.78
3	0.65	0.70	0.76	0.71	0.76	0.66	0.71	0.75	0.76	0.90	0.84	0.86	1.00	0.79	0.88	0.86	0.82	0.80	0.77
2	0.66	0.75	0.79	0.77	0.75	0.79	0.57	0.75	0.89	0.85	0.85	1.00	0.86	0.84	0.88	0.87	0.86	0.85	0.82
1	0.72	0.76	0.82	0.74	0.79	0.66	0.67	0.86	0.84	0.86	1.00	0.85	0.84	0.87	0.84	0.88	0.82	0.79	0.78
0	0.77	0.78	0.84	0.78	0.85	0.68	0.82	0.79	0.81	1.00	0.86	0.85	0.90	0.78	0.85	0.84	0.78	0.79	0.74
-1	0.72	0.81	0.84	0.80	0.77	0.80	0.55	0.77	1.00	0.81	0.84	0.89	0.76	0.80	0.82	0.81	0.78	0.78	0.71
-2	0.73	0.76	0.79	0.70	0.76	0.61	0.68	1.00	0.77	0.79	0.86	0.75	0.75	0.74	0.70	0.75	0.70	0.66	0.66
-3	0.71	0.65	0.69	0.63	0.80	0.53	1.00	0.68	0.55	0.82	0.67	0.57	0.71	0.55	0.63	0.61	0.52	0.55	0.49
-4	0.70	0.75	0.74	0.85	0.71	1.00	0.53	0.61	0.80	0.68	0.66	0.79	0.66	0.65	0.69	0.63	0.62	0.63	0.55
-5	0.70	0.83	0.88	0.81	1.00	0.71	0.80	0.76	0.77	0.85	0.79	0.75	0.76	0.67	0.73	0.71	0.64	0.63	0.58
-6	0.72	0.86	0.88	1.00	0.81	0.85	0.63	0.70	0.80	0.78	0.74	0.77	0.71	0.68	0.72	0.67	0.62	0.62	0.55
-7	0.87	0.92	1.00	0.88	0.88	0.74	0.69	0.79	0.84	0.84	0.82	0.79	0.76	0.71	0.73	0.72	0.66	0.65	0.60
-8	0.88	1.00	0.92	0.86	0.83	0.75	0.65	0.76	0.81	0.78	0.76	0.75	0.70	0.64	0.68	0.66	0.63	0.60	0.54
-9	1.00	0.88	0.87	0.72	0.70	0.70	0.71	0.73	0.72	0.77	0.72	0.66	0.65	0.59	0.62	0.59	0.55	0.54	0.47

Таблиця 6.1.4 Суми діагоналей матриці кореляцій для одинадцяти спектральних складових.

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\hat{S}_r	78.30	112.48	102.40	100.30	77.43	62.88	49.84	30.78	22.88	13.80	6.92
$\hat{V}(rf_0)$	78.28	110.80	100.64	98.58	76.32	62.64	49.24	30.54	22.34	13.66	7.00

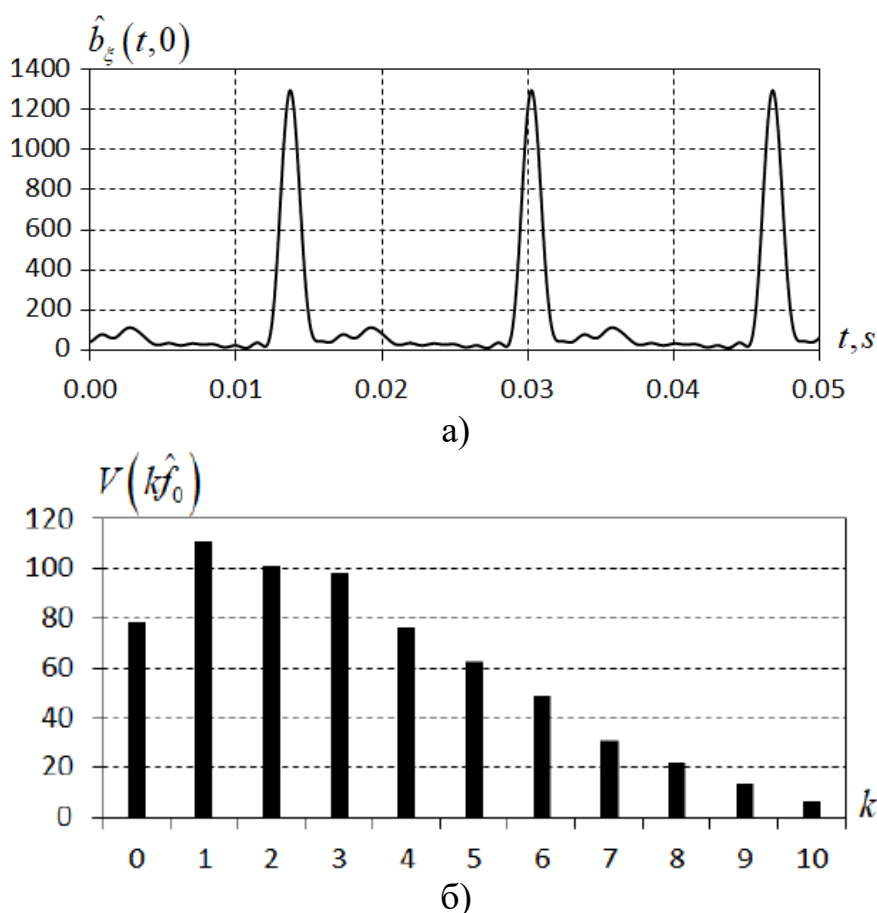


Рис.6.1.20. Оцінка функції дисперсії для 11-компонентного сигналу (а) і його амплітудний спектр (б)

Суми приростів взаємокореляційних компонентів значно перевищують суми приростів їх потужностей (Табл. 6.1.6). Різниця між ними досягає найбільшого значення при використанні фільтрації з смугою, що дорівнює $15\hat{f}_0$. Виходячи з цього, для подальшого моніторингу такого механізму слід рекомендувати використовувати фільтрацію з пропускнуою здатністю не менше за $15\hat{f}_0$. Подальше збільшення ширини смуги фільтра дозволяє врахувати більше число корельованих височастотних компонент, що призводить як до зростання значень амплітуди дисперсії, так і до збільшення ширини спектра. Для отримання дисперсії з амплітудним спектром, представленим на Рис. 6.1.7, пропускна здатність фільтра повинна дорівнювати $40\hat{f}_0$.

Таблиця 6.1.5. Амплітуди гармонік дисперсії та величина індикатора нестационарності I для різних величин смуги пропускання.

Амплітуда	Ширина смуги пропускання (число гармонік дисперсії)						
	$3\hat{f}_0$	$5\hat{f}_0$	$7\hat{f}_0$	$9\hat{f}_0$	$11\hat{f}_0$	$15\hat{f}_0$	$19\hat{f}_0$
S_0	30.00	72.95	57.75	69.69	78.30	90.08	97.92
S_1	17.12	29.76	40,19	48,485	56,24	68,2	76,025
S_2	7.84	21.88	33,095	41,84	51,2	64,39	72,9
S_3		13.58	29,09	41,37	50,095	63,055	72,22
S_4		4.88	16,67	28,09	38,715	52,345	61,76
S_5			8,895	19,545	31,44	47,49	57,28
S_6			5,085	14,57	24,77	42,625	53,41
S_7				7,75	15,39	32,4	44,475
S_8				3,72	11,41	25,94	39,26
S_9					6,9	19,14	32,015
S_{10}					3,66	14,125	24,41
S_{11}						10,34	19,235
S_{12}						6,47	14,76
S_{13}						3,615	6,42
S_{14}						1,545	7,675
S_{15}							5,07
S_{16}							3,2
S_{17}							1,71
S_{18}							0,64
I	0.83	1.63	2.30	2.95	3.70	5.01	6.11

Таблиця 6.1.6. Суми компонентів взаємних кореляцій та їх потужності.

Ширина смуги (число гармонік)	$3\hat{f}_0$	$5\hat{f}_0$	$7\hat{f}_0$	$9\hat{f}_0$	$11\hat{f}_0$	$15\hat{f}_0$	$19\hat{f}_0$
S_0	30.00	42.95	57.75	69.69	78.30	90.08	97.92
$\sum S_r$	24.96	70.1	133.025	205.37	289.82	451.68	592.47

Часові зміни дисперсії сигналу викликані кореляціями гармонік спектру, різниця між частотами яких кратна базовій частоті ω_0 . Тому смугова фільтрація сигналу в частотній області, в якій зосереджені корельовані гармоніки, може міняти як спектральний склад сигналу, так і кількість гармонік дисперсії та їх

амплітуди. Якщо ширину смуги фільтра сигналу задати рівною $M\omega_0$, де M є натуральне число ($M \leq L$), то амплітуди гармонік дисперсії для відфільтрованого сигналу будуть поступово зменшуватися зі зростанням числа гармонік k і будуть дорівнювати нулю для $k > M$. Тому для збереження потужності змінної складової дисперсії та отримання її адекватних оцінок слід вибирати ширину смуги фільтра таким чином, щоб фільтрація не обмежувала частотну область кореляції гармонік. Ширина смуги фільтра може бути отримана виходячи з оцінок взаємних кореляцій спектральних складових гармонік базової частоти.

6.2. Порівняння результатів обробки ПНВС декантера з методом “квадрату огинаючої”.

Методи, застосовані вище для аналізу вібрації, добре обґрунтовані на основі їх моделі у формі ПНВП. Численні результати, отримані шляхом обробки часових рядів реальних даних, підтвердили корисність цієї моделі для опису саме тих характеристик вібрації, які є важливими для вирішення діагностичних проблем.

Величини, які описують періодичну структуру моментних функцій першого та другого порядку для моделі ПНВП, є симптоматичними для виявлення та оцінки несправностей на початкових стадіях їх розвитку. Перші роботи, в яких пропонувався цей підхід, з'явилися в другій половині 1990-х років [171–173], коли основним інструментом виявлення несправностей був метод квадрату огинаючої [167, 168, 177]. Зауважимо, що останні широко використовуються й сьогодні. Зв'язок цих підходів схематично обговорюється в літературі [169, 192]. Однак тут хочеться звернути увагу на їхню різну ідеологічну основу. Саме це зумовлює відмінності в процедурах їх обробки, їх ефективності та інтерпретації результатів, пошуку засобів покращення якості останніх, тощо. У рамках підходу ПНВП ми не визначаємо “квадрат огинаючої” як суму квадратів сигналу та його перетворення Гільберта, оскільки

ця сума є високочастотним випадковим процесом, функція середнього якого дорівнює подвоєній дисперсії ПНВП, а спектр “квадрату огинаючої” рівний подвоєному амплітудному спектру дисперсії [208-216]. Кореляційна функція цього квадрата огинаючої дорівнює четвертій моментній функції для ПНВП, яка (в спектральній формі) використовується для виділення так званої “інформативної смуги частот”.

Знаходження так званої “центральної частоти” та визначення смуги пропускання відіграє ключову роль в процесі аналізу квадрату огинаючої. Спектральний ексцес вважається одним із найпотужніших методів вибору відповідної смуги частот [180, 181]. Він розраховується за формулою:

$$K_{\xi}(f) = \frac{\hat{S}_{4\xi}(f)}{\hat{S}_{2\xi}^2(f)} - 2$$

Тут статистика $\hat{S}_{2n\xi}(f)$ – це емпіричний спектральний момент другого порядку, визначений як

$$\hat{S}_{2n\xi}(f) = \left\langle |F_w(kM, f)|^{2n} \right\rangle_k$$

де $F_w(kM, f)$ є перетворення Фур’є короткого у часі фрагмента сигналу

$$F_w(kM, f) = \sum_{n=k}^{k+K_w-1} \xi(nh) W(n-kM) e^{-i2\pi fn},$$

$W(n)$ – прямокутне вікно довжини K_w , а знаком $\langle \cdot \rangle_k$ позначено оператор усереднення у часі за індексом k . Припускається, що аналізований сигнал є локально стаціонарним, а довжина кореляції сигналу менша за довжину вікна [169]. Зокрема, у літературі рекомендується вибирати довжину вікна, меншу за індивідуальний імпульс сигналу [169, 180, 181].

Умова локальної стаціонарності вібраційних сигналів виконується, якщо довжина кореляції сигналу значно менша за період нестационарності. Незважаючи на те, що для вібраційних сигналів ця умова виконується рідко, ексцес успішно використовується на практиці. У розглянутому випадку

вібраційний сигнал також не є локально стаціонарним, оскільки період нестационарності, навпаки, значно менший за кореляційну довжину сигналу.

Оскільки діагностичні властивості стохастичної частини сигналу проявляються у діапазоні частот $[0 \dots 2,8 \text{ кГц}]$, розрахуємо ексцес для частот, які належать до цього діапазону. Для аналізу виберемо величини довжини вікон для перетворення Фур'є коротких у часі фрагментів сигналу у залежності від періоду нестационарності P рівними $0.3\hat{P}$, $0.4\hat{P}$, та $0.6\hat{P}$. Найбільші значення ексцесу досягаються в інтервалі $[0,2 \text{ кГц} \dots 2,8 \text{ кГц}]$ (Рис. 6.2.1). У цьому інтервалі також зосереджені найбільші пікові значення оцінки спектральної густини потужності сигналу (Рис. 6.1.7 (б)). Для розрахунку спектру квадрата огинаючої рекомендується вибирати частотну смугу в інтервалі, ширина якого дорівнює 3-4-кратній величині базової частоти $[167, 169, 184, 213]$. Розрахуємо спектр квадрату огинаючої, вибравши смугу $[1,3 \text{ кГц} \dots 1,6 \text{ кГц}]$, яка містить 5 високочастотних компонентів сигналу.

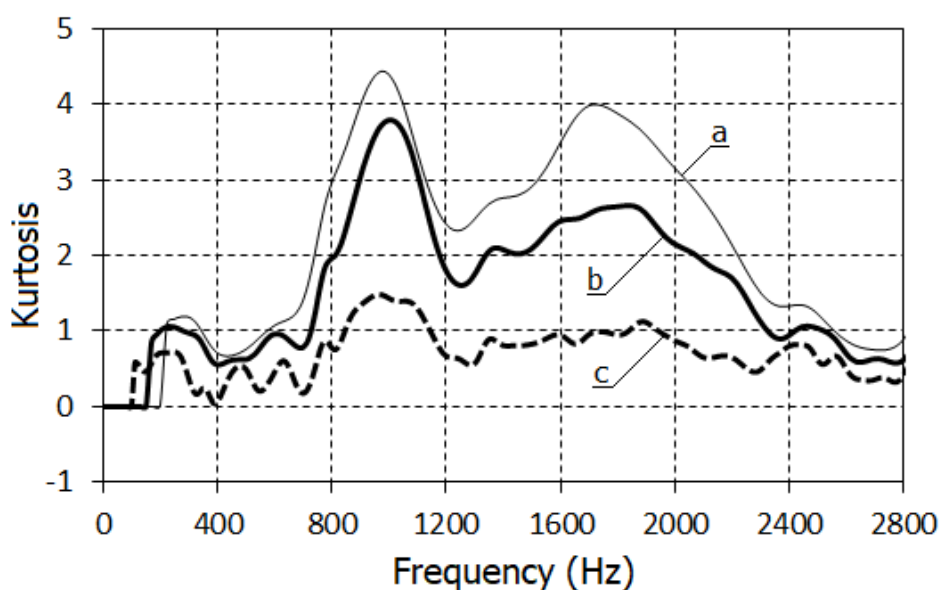


Рис. 6.2.1. Спектральний ексцес вібраційного сигналу:
а) $K_w = 0.3P$; б) $K_w = 0.4P$; в) $K_w = 0.6P$

Спектр квадрату огинаючої (SES) у багатьох роботах (наприклад [203, 205]) знаходять за допомогою дискретного перетворення Фур'є (DFT) квадрату модуля аналітичного сигналу:

$$SES(K) = DFT \left\{ |\zeta(n)|^2 \right\} = DFT \left\{ \xi^2(nh) + \eta^2(nh) \right\}.$$

Використовуючи дискретне перетворення Фур'є (DFT) [21, 164]

$$DFT \left\{ |\zeta(n)|^2 \right\} = \sum_{n=0}^{K-1} |\zeta(n)|^2 e^{-ik \frac{2\pi}{K} n}$$

застосуємо дискретне у часі перетворення Фур'є (DTFT) [45, 47] для отримання оцінки такого спектру

$$\hat{F}(f) = h \sum_{n=0}^{K-1} |\zeta(nh)|^2 e^{-i2\pi fnh}, \quad (6.2.1)$$

підставляючи $f = k\Delta f$, $\Delta f = \frac{1}{Kh}$ і тоді:

$$DTFT \left\{ |\zeta(n)|^2 \right\} = \frac{\hat{F}(k\Delta f)}{h}.$$

Враховуючи, що $E\eta^2(nh) = E\xi^2(nh)$ для математичного сподівання (6.2.1)

маємо:

$$E\hat{F}(f) = 2h \sum_{n=0}^{K-1} b_{\xi}(nh, 0) e^{-i2\pi fnh}. \quad (6.2.2)$$

Підставляючи в рівняння (6.2.2) представлення дисперсії $b_{\xi}(nh, 0)$ у вигляді ряду Фур'є, отримуємо (Додаток К):

$$E\hat{F}(f) = 2h \sum_{r=-2L}^{2L} B_r^{(\xi)}(0) e^{i\pi(rf_0 - f)(K-1)h} \frac{\sin \pi(2f_0 - f)Kh}{\sin \pi(rf_0 - f)h}. \quad (6.2.3)$$

Величина оцінки в рівнянні (6.2.3) у точках $f = rf_0$ дорівнює

$$E\hat{F}(rf_0) = 2TB_r^{(\xi)}(0),$$

де $T = Kh$ – тривалість реалізації. Отже, величини $E\hat{F}(rf_0) \neq 2B_2^{(\xi)}(0)$ та залежать від тривалості реалізації T .

Дисперсія оцінки (6.2.3) для гаусівського ПНВП дорівнює (Додаток К):

$$\text{Var}\hat{F}(f) = 4h^2 \left[\sum_{n=0}^{K-1} [b_{\xi}^2(nh, 0) + b_{\xi\xi}^2(nh, 0)] + 2 \sum_{r=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{K-r-1} [b_{\xi}^2(nh, 0) + b_{\xi\xi}^2(nh, rh)] \cos 2\pi frh \right]. \quad (6.2.4)$$

З рівняння (6.2.4) випливає, що $Var\hat{F}(f) \rightarrow \infty$ при $K \rightarrow \infty$. Отже, оцінка (6.2.3) є неслухною. Встановлені властивості оцінки (6.2.1) дають підстави зробити висновок, що обчислення спектру дисперсії аналітичного сигналу за допомогою DFT призводить до значних похибок.

Наведені вище висновки підтверджуються результатами обробки сигналу. На Рис. 6.2.2 представлено графіки частотної залежності величини $|\hat{F}(f)|$ від довжини реалізації, де значення $|\hat{F}(f)|$ розраховувалися з кроком $\Delta f = 0.1 \text{ Hz}$. У Табл. 6.2.1 наведено визначені величини максимумів та їх частоти. Як бачимо, максимальні значення змінюються приблизно пропорційно довжині реалізації, при цьому потужність флуктуацій також зростає зі збільшенням довжини реалізації. Очевидно, що максимальні значення не можна розглядати як оцінки амплітуд гармонік квадрату огинаючої, хоча точки максимальних значень близькі до значень основної частоти та кратних їй частот.

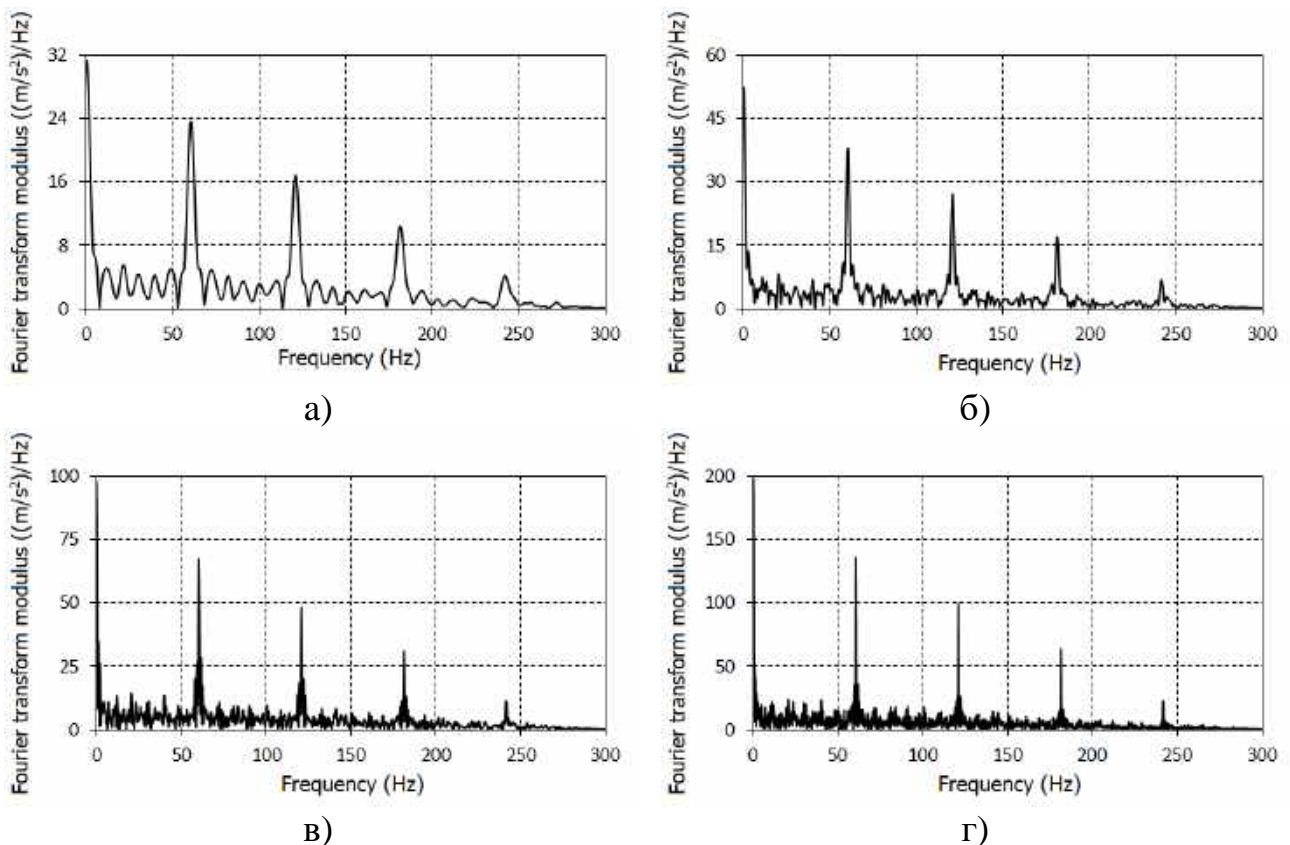


Рис. 6.2.2. Амплітудні спектри модуля аналітичного сигналу залежно від довжини реалізації а) $K = 3 \cdot 10^3$; б) $K = 6 \cdot 10^3$; в) $K = 12 \cdot 10^3$; г) $K = 24 \cdot 10^3$

Таблиця 6.2.1. Величини та частоти точок максимумів перетворення Фур'є (6.2.1).

Розмір вибірки, K	Точки максимумів, f_{\max} , Hz				
	0	60.42	120.84	181.26	241.68
$3 \cdot 10^3$	31.238	23.559	16.823	10.388	4.073
$6 \cdot 10^3$	52.306	37.880	27.121	16.911	6.711
$12 \cdot 10^3$	97.696	67.220	47.960	30.871	11.052
$24 \cdot 10^3$	197.940	135.686	98.904	62.848	22.093

Розглянемо тепер перетворення

$$\begin{cases} \hat{C}_a(f) \\ \hat{S}_a(f) \end{cases} = \frac{2}{2K+1} \sum_{n=-K}^K [\xi^2(nh) + \eta^2(nh)] \begin{cases} \cos 2\pi fnh \\ \sin 2\pi fnh \end{cases}, \quad (6.2.4)$$

яке називають компонентною [144, 145, 171] або циклічною [139, 164] статистикою. Саме в такому вигляді спектр квадрату огибаючої представлено в [206, 207]. Виходячи з результатів [104, 199, 208,], можна зробити висновок, що

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_a(f) = \begin{cases} 2C_k(0), & f = kf_0, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_a(f) = \begin{cases} 2S_k(0), & f = kf_0, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

і

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var} C_a(f) = 0, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var} S_a(f) = 0,$$

Якщо кореляційні компоненти зникають зі зростанням часу затримки u :

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} B_r(u) = 0, \quad \forall r = \overline{0, 2L}.$$

то це означає, що точки екстремумів статистики можна розглядати як оцінки частот несучих гармонік, а величини екстремумів – як оцінки коефіцієнтів Фур'є дисперсії аналітичного сигналу, і тоді наступні величини

$\hat{V}_a(k\hat{f}_0) = \left[\left[\hat{C}_a(k\hat{f}_0) \right]^2 + \left[\hat{S}_a(k\hat{f}_0) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ є оцінками амплітуд гармонік. Показано [28, 30, 199, 208, 209], що дисперсії оцінок частот мають порядок збіжності $O(T^{-3})$, а дисперсії оцінок коефіцієнтів Фур'є мають порядок збіжності $O(T^{-1})$. З огляду на це, оцінка базової частоти f_0 вибрана як перший етап при обробці часових рядів ПНВС. Наступним етапом є розрахунок коефіцієнтів Фур'є дисперсії за допомогою статистики (6.1.6) для величини періоду $\theta = \hat{f}_0^{-1}$. Отримана таким чином статистика, на відміну від (6.2.4), є селективною лише відносно гармонік із частотами $k\hat{f}_0$, причому її селективність зростає зі зростанням довжини реалізації сигналу.

Максимальні значення $\hat{V}_a(f) = \left[\left[\hat{C}_a(f) \right]^2 + \left[\hat{S}_a(f) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, які були розраховані з використанням циклічної статистики (6.2.4), наведені в Табл. 6.2.2. Як видно з таблиці, ці значення для великих K несуттєво відрізняються від величини оцінок амплітуд гармонік дисперсії \hat{S}_r , які представлені в Табл. 6.1.5 у колонці для сигналу з шириною смуги пропускання $5\hat{f}_0$.

Таблиця 6.2.2. Величини максимумів для циклічної оцінки $\hat{V}_a(f)$ модуля аналітичного сигналу

Розмір вибірки, K	Точка максимуму, f_{\max} , Hz				
	0	60.42	120.84	181.26	241.68
$3 \cdot 10^3$	104.163	157.114	112.188	69.278	27.158
$6 \cdot 10^3$	87.190	126.286	90.418	56.378	22.372
$12 \cdot 10^3$	81.420	112.042	79.940	51.456	18.420
$24 \cdot 10^3$	82.478	113.076	82.424	52.406	18.412

6.3. Аналіз вібрації підшипника кочення з пошкодженим зовнішнім кільцем.

Приклад застосування моделі ПНВС для аналізу експериментальних даних, отриманих Case Western Reserve University, що використовуються у якості неформальної “бази сигналів” для тестування методик обробки сигналів вібродіагностування [258]. Вибрано часовий ряд для вібрації підшипника кочення з дефектами на зовнішньому кільці. Дефекти (тонкі пропили) були розташовані в зоні навантаження (орієнтовані вниз, у напрямку дії сили тяжіння), а їх ширина становила 0,18 мм і 0,36 мм (набори даних 133 і 237, [258]). Фрагменти реалізації 133-го часового ряду показаний на Рис. 6.3.1 (а, б). Видно, що коливання мають вигляд послідовності коливальних імпульсів, які затухають з інтервалами тривалістю 0,01 с. Інтервали часу між окремими імпульсами близькі до періоду обертання кульки підшипника по зовнішньому кільцю (BPFO). Для дослідження загальних кореляційних властивостей необробленого сигналу та встановлення його спектрального складу на початковому етапі розраховано оцінки кореляційної функції сигналу (Рис. 6.3.2 (а, б)). Кореляційна функція для має вигляд повільно затухаючих коливань з груповою структурою. Виявлена групова структура свідчить про те, що кореляційна функція складається із затухаючих коливань з близькими частотами, взаємодія яких призводить до биття. Незатухаючий хвіст кореляційної функції можна пояснити присутністю детермінованих коливань у необробленому сигналі.

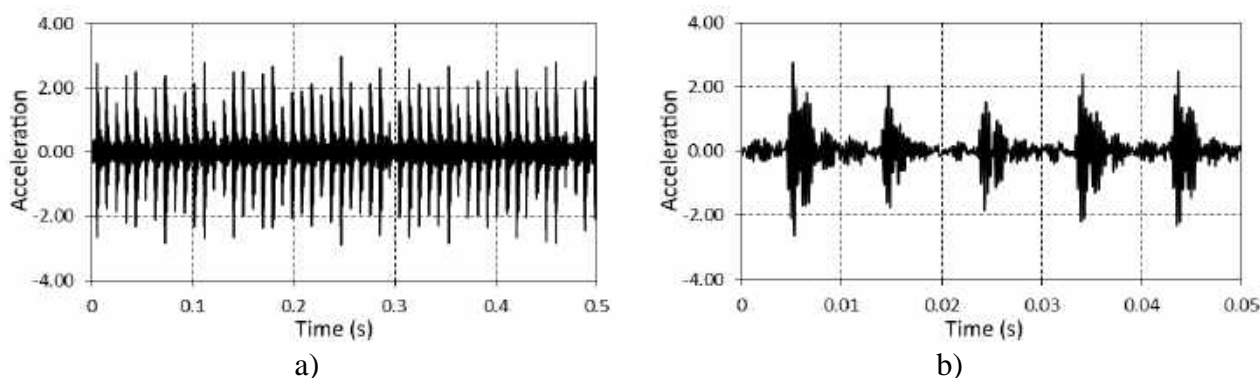


Рис. 6.3.1. Фрагменти реалізації вібраційного сигналу 137 у різних масштабах часу.

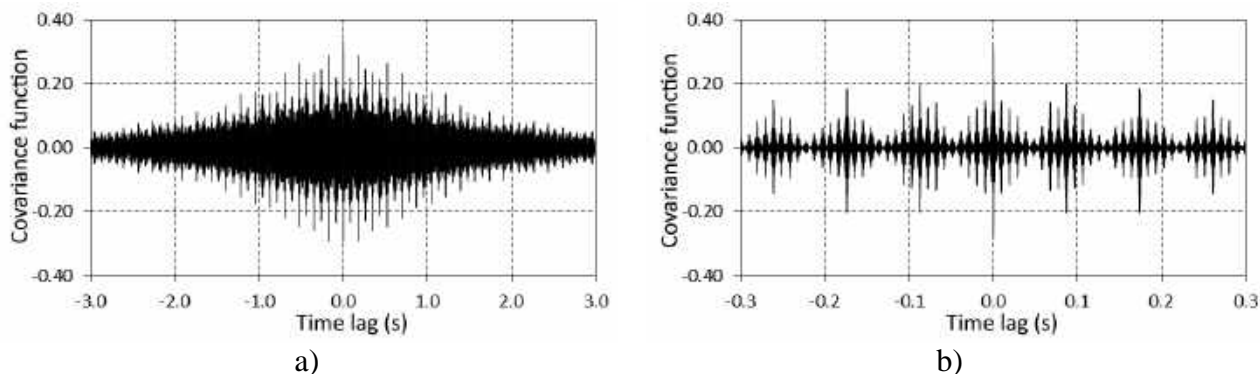


Рис. 6.3.2. Оцінка кореляційної функції сигналу 137 у різних масштабах часу

Обробку та аналіз сигналу виконано відповідно до методики, викладеної у підрозділі 6.1. Визначена за допомогою МНК-функціоналу першого порядку [198, 208] базова частота регулярної складової становила $f = 103.42$ Гц. Оцінка часової залежності регулярної складової та її амплітудний спектр зображені на Рис. 6.3.3. Як видно з Рис. 6.3.3 (б), амплітудний спектр регулярної складової широкий і містить близько 40 гармонік. Основна частина потужності регулярних коливань припадає на гармоніки 24–37 порядків. Ці порядки відповідають діапазону частот [2,48 кГц, 3,83 кГц]. Регулярна складова коливань має вигляд груп, що йдуть одна за одною з частотою, близькою до \hat{f}_0 .

Далі аналізуємо стохастичну складову коливань, часові ряди яких отримані шляхом віднімання від необробленого сигналу оцінки регулярної складової тобто проводимо центрування сигналу. Базова частота стохастичної складової (частота прихованої періодичності в складі стохастичної складової), отримана з використанням МНК-функціоналу 2 порядку становила $\hat{f}_0 = 103.42$ Гц.

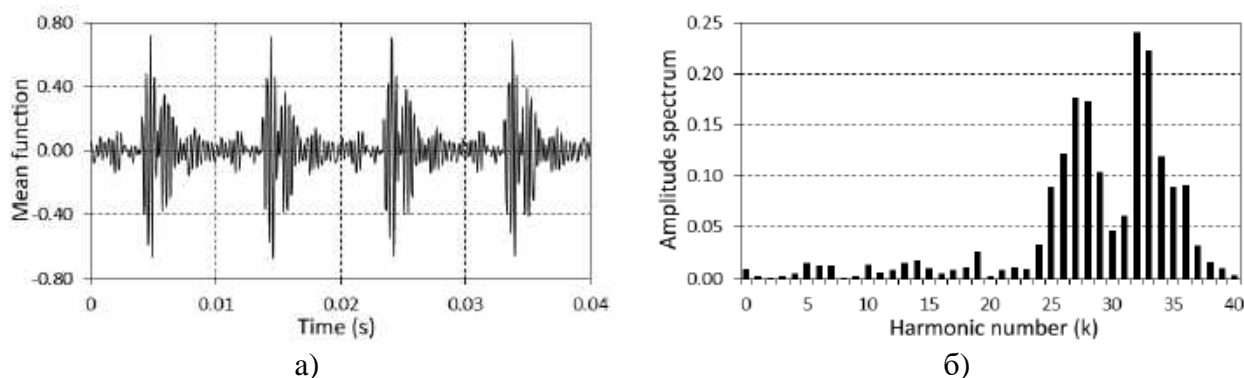


Рис. 6.3.3. Оцінка функції математичного сподівання сигналу 137 (а) та її амплітудний спектр (б)

Розрахована з використанням цієї частоти оцінка дисперсії 137 сигналу зображені на Рис. 6.3.4

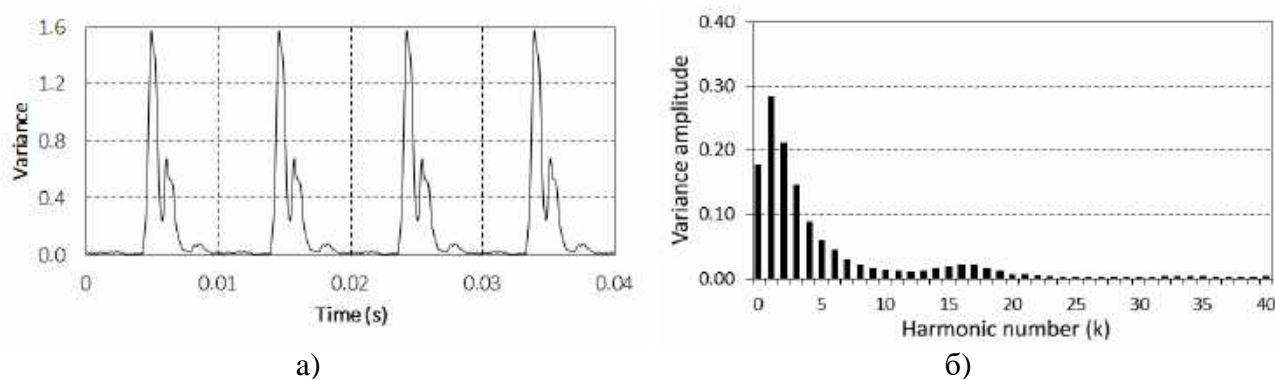


Рис. 6.3.4. Оцінка функції дисперсії сигналу 137 (а) та її амплітудний спектр (б)

Для більш точної чисельної оцінки ступеня розвитку дефекту підшипника кочення можна використати значення амплітуд гармонік дисперсії, наведені в Табл. 6.3.1. Розраховуючи величину індикатора нестационарності сигналу [198,

208] на основі даних з таблиці отримуємо $I_1 = \sum_{k=1}^{11} \hat{V}_k^{(1)}(\hat{f}_0) / \hat{B}_0^{(1)}(0) = 7.24$.

Далі проаналізуємо 237-й набір даних. На Рис.6.3.5 зображено фрагмент сигналу та оцінка його кореляційної функції. Різниця між сигналами 133 і 237 помітна вже в їх часових залежностях (Рис. 6.3.1, 6.3.2, 6.3.5). Сигнали відрізняються як різними величинами імпульсів коливань, так і інтервалами між ними. Ця різниця також виразно простежуються на графіках оцінок кореляційної функції (Рис. 6.3.2 6.3.5). Незатухаючий “хвіст” для сигналу 237 є менш потужний. Групи коливань також слідує одна за одною з частотою, близькою до ВРФО; однак потужність цих групи не затухає монотонно. Варіації відстаней між піками на спектральній густині сигналу (Рис. 6.3.6) свідчить про те, що викликані механічними впливами модулюючі коливання очевидно складаються з резонансних коливань з декількома власними частотами які відповідають різним елементам підшипника. Визначена оцінка базової частоти регулярної складової сигналу складає $\hat{f}_0 = 103.00$ Гц. Оцінка регулярної складової та її амплітудний спектр, розраховані на основі цієї базової частоти зображені на Рис. 6.3.7. Як видно з Рис. 6.3.7 (б), амплітудний спектр

регулярної складової широкій і містить близько 30 значущих гармонік, зосереджених у двох широких смугах. Регулярна складова має вигляд періодичних груп з високим ступенем модуляції. Наявність порівняно потужних низькочастотних гармонік є його головною відмінною рисою від сигналу 137. Ці гармоніки дещо спотворюють групову структуру детермінованих коливань. Оцінка періоду прихованих періодичностей у стохастичній складовій 237 сигналу дала величину $\hat{f}_0 = 103.00$ Гц. Розрахована з використанням цієї частоти оцінка дисперсії 237 сигналу зображені на Рис. 6.3.8.

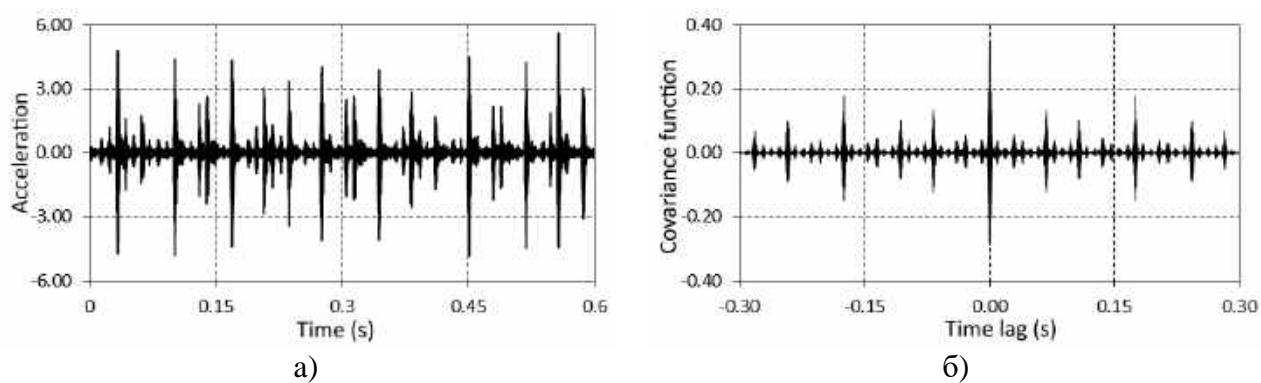


Рис. 6.3.5. Фрагмент сигналу 237 (а) та оцінка його кореляційної функції (б)

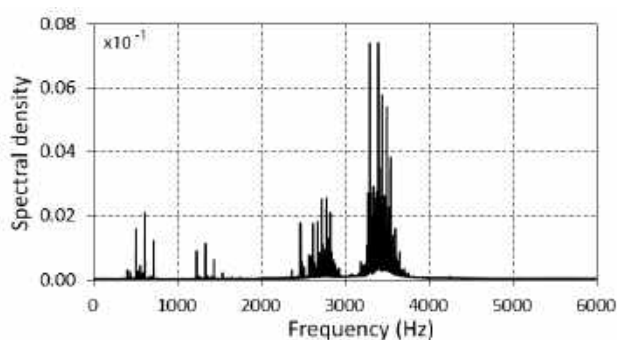


Рис. 6.3.6. Оцінка спектральної густини сигналу 237 у стаціонарному наближенні

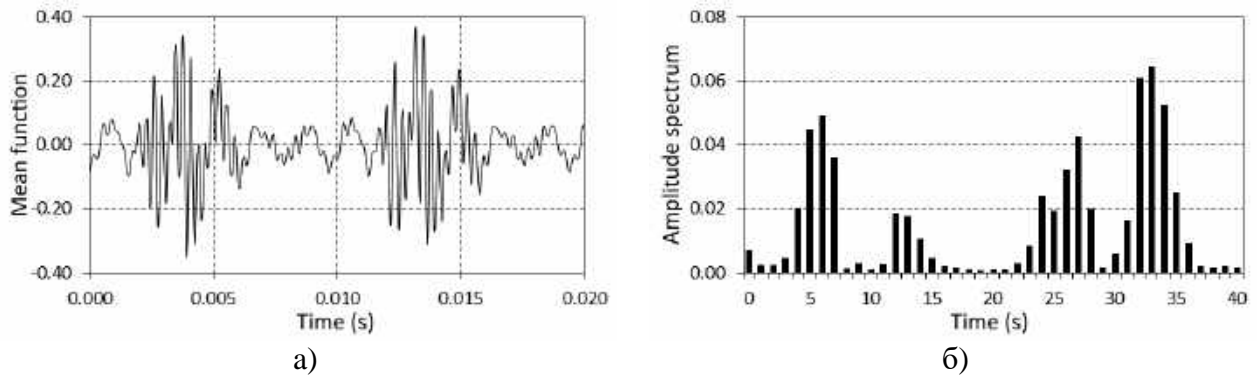


Рис. 6.3.7. Оцінка регулярної складової сигналу 237 (а) та її амплітудний спектр (б)

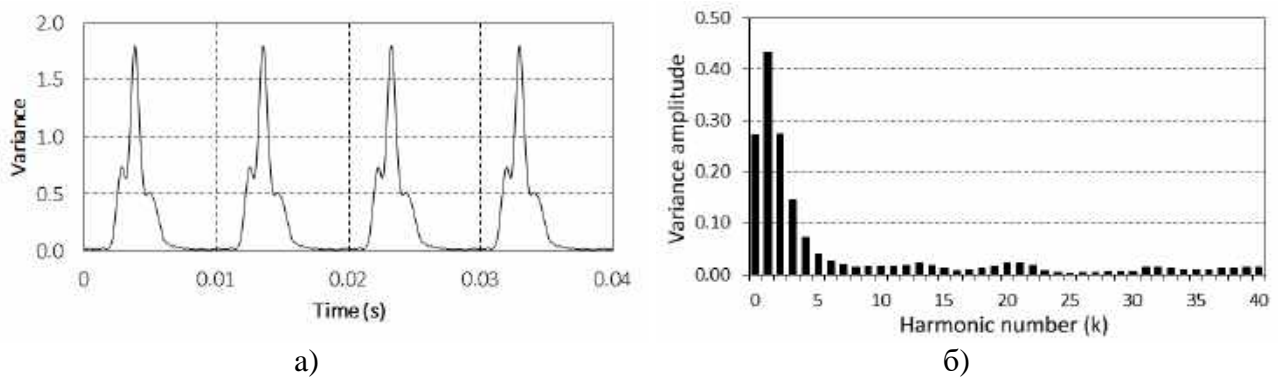


Рис. 6.3.8. Оцінка функції дисперсії сигналу 237 (а) та її амплітудний спектр (б)

Величини амплітуд гармонік дисперсії сигналу 237 наведені у Табл. 6.3.2.

Таблиця 6.3.1. Величини амплітуд гармонік дисперсії сигналу 137

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\hat{V}_k^{(1)}(\hat{f}_0)$	0.2006	0.3184	0.2365	0.1639	0.1064	0.1313	0.1391	0.1240	0.1010	0.0683	0.0415	0.0229

Таблиця 6.3.2. Величини амплітуд гармонік дисперсії сигналу 237

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\hat{V}_k^{(2)}(\hat{f}_0)$	0.2916	0.4664	0.2931	0.0855	0.1064	0.0733	0.0973	0.1091	0.0979	0.0729	0.0502	0.0291

Використовуючи значення амплітуд гармонік дисперсії, наведені у Табл. 6.3.2, можна розрахувати інші індикатори оцінки стану дефекту

підшипника. По-перше, на основі величини компонентів нульової кореляції бачимо, що усереднена за часом потужність стохастичної складової вібрації зростає від $\hat{B}_0^{(1)}(0) = 0.2006$ до $\hat{B}_0^{(2)}(0) = 0.2916$. По-друге, сума амплітуд гармонік зростає – від 1,4533 до 1,5294. Розрахована величина індикатора нестационарності складає $I_1 = \sum_{k=1}^{11} \hat{V}_k^{(2)}(\hat{f}_0) / \hat{B}_0^{(2)}(0) = 5.24$. Оскільки усереднена за

часом потужність стохастичної складової зростає зі зростанням несправності, ми можемо врахувати цей приріст $\Delta B_0(0) = B_0^{(2)}(0) - B_0^{(1)}(0)$, формуючи [198, 208] другий індикатор розвитку дефекту

$$I_2 = \left[\Delta B_0(0) + \sum_{k=1}^{11} V_k(\hat{f}_0) \right] / B_0^{(1)}(0) = 8,08. \text{ Цей індикатор демонструє вищу}$$

чутливість до зміни розміру дефекту елемента підшипника.

Щоб порівняти ефективність моделі ПНВС також було проведено обробку наборів даних з бази CWRU, які визнані в [258] такими, для яких дефекти не виявляються кращими відомими методами (197, 198, 199 і 200 набори). При обробці та аналізі сигналів з номерами 137 та 237 було показано, що у разі пошкодження зовнішнього кільця основна частота моментної функції близька до ВРФО. Виходячи з цього, виявлення дефекту буде виконано як задачу пошуку прихованих періодичностей першого та другого порядку, змінюючи пробну частоту в інтервалах, що містять ВРФО. Оскільки часові зміни моментних функцій ПНВС другого порядку визначаються кореляціями гармонік спектру, то для забезпечення найбільшої чутливості для їх виявлення виберемо число гармонік у функціоналі пошуку базової частоти більше 20.

Значення ВРФО, які були розраховані для цих наборів на основі технічних даних для сигналів з номерами 197, 198, 199 і 200 з бази CWRU, відповідно дорівнюють 107,37 Гц, 105,85 Гц, 104,56 Гц і 103,37 Гц. На Рис. 6.3.9 представлені оцінки кореляційної функції та спектральної густини у стаціонарному наближенні для 197-го часового ряду в частотному інтервалі [2,0 кГц, 6,0 кГц]. Оцінка кореляційної функції має незатухаючий хвіст, тому спектр

сигналу змішаний. Щоб розділити регулярну та стохастичну складові визначено базову частоту за допомогою функціонала першого порядку. Найбільше пікове значення функціоналу рівне $\hat{f}_0^{(1)} = 108.7$ Гц. Ми приймаємо це значення частоти як базову частоту. Виконуючи гармонійний аналіз сигналу з використанням компонентної статистики, на основі інтерполяційної формули отримуємо коефіцієнти Фур'є функції математичного сподівання та її часову залежність (Рис. 6.3.10). Зазначимо, що амплітудний спектр детермінованих коливань в основному складається з високочастотних гармонік, частоти яких знаходяться в інтервалі [2,15 кГц, 4,5 кГц]. У цьому інтервалі також зосереджена основна частина спектра сигналу. Аналіз стохастичної складової сигналу функціоналом другого порядку з числом гармоні рівним 20 дав оцінку базової частоти $\hat{f}_0^{(2)} = 107.51$ Гц. На основі цієї величини визначено коефіцієнти Фур'є функції дисперсії та побудовано її залежність від часу (Рис. 6.3.11).

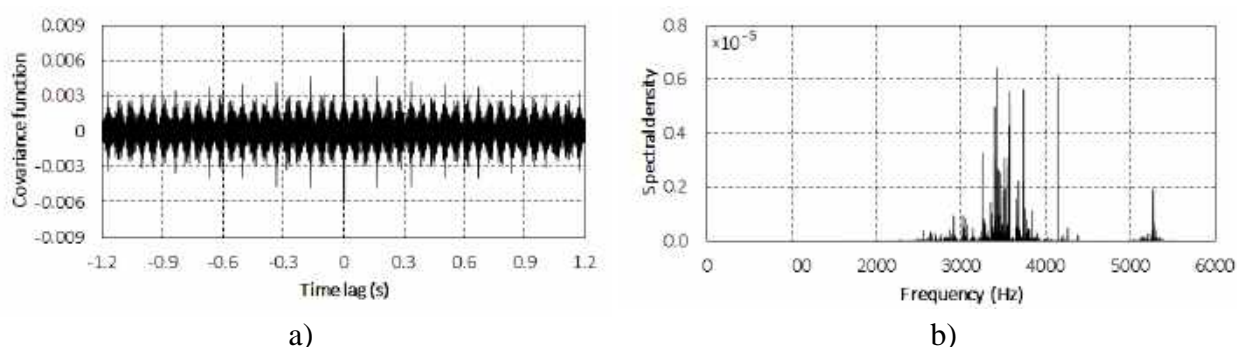


Рис. 6.3.9. Оцінки кореляційної функції (а) та спектральної густини (б) для сигналу за номером 197.

Числові значення амплітуд для гармонік дисперсії сигналу 197 наведені в Табл. 6.3.3. Як бачимо, третя гармоніка має найбільшу амплітуду. Відношення цієї амплітуди до нульової кореляційної складової, яка визначає потужність фонового шуму, дорівнює 0,155. Відношення суми всіх гармонік до нульової складової (індикатор $I_1 = 0.64$). Графік функції дисперсії в часі містить високі гострі піки, які йдуть один за одним протягом періоду прихованої періодичності. Також добре помітні коливання з частотою третьої гармоніки.

При обробці решти наборів даних отримано аналогічні результати. Далі наведено лише ті, які безпосередньо пов'язані з виявленням дефектів, тобто результати виявлення прихованих періодичностей другого порядку та побудови функцій дисперсії сигналів. Визначені величини оцінок частот прихованих періодичностей для сигналів з номерами склали відповідн 198, 199, 200 $\hat{f}_0^{(2)} = 106.09$ $\hat{f}_0^{(2)} = 105.21$ $\hat{f}_0^{(2)} = 103.65$ Гц. Ці величини лише несуттєво відрізняються від відносних значень, які були розраховані на основі формули ВРФО з [55]. Отримані базові частоти були використані для розрахунку амплітудних спектрів та побудови функцій дисперсії представлених на Рис. 6.3.12. На представлених амплітудних спектрах видно, що амплітуди третьої гармоніки є найбільшими для всіх наборів даних. Відповідні коефіцієнти для третьої гармоніки мають величини $\hat{V}^{(3)}(3\hat{f}_0^{(3)})/\hat{V}^{(0)}(0) = 0.167$ для 198 сигналу, $\hat{V}^{(3)}(3\hat{f}_0^{(3)})/\hat{V}^{(0)}(0) = 0.202$ для 199 та $\hat{V}^{(3)}(3\hat{f}_0^{(3)})/\hat{V}^{(0)}(0) = 0.124$ для 200. При цьому індикатори I_1 , розраховані на основі суми всіх 20 гармонік мають величини $I_1 = 0.727$, $I_1 = 1.122$, $I_1 = 0.631$ відповідно.

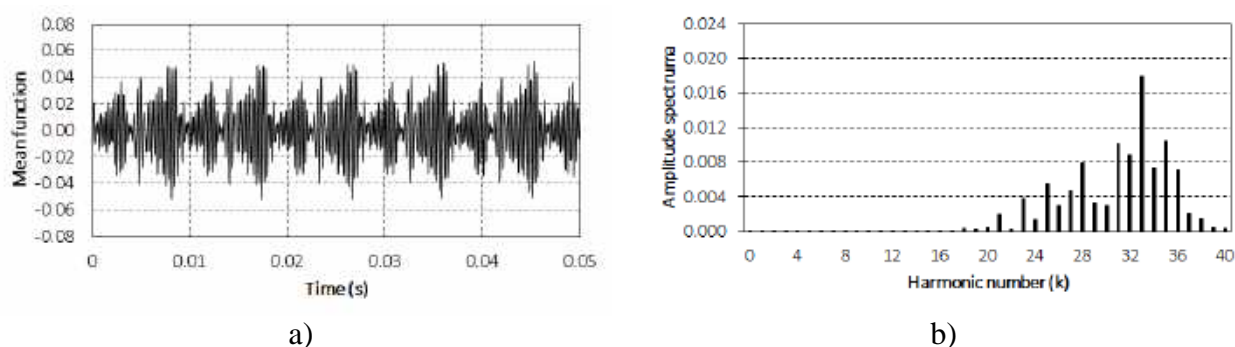


Рис. 6.3.10. Оцінка функції математичного сподівання сигналу 197 (а) та її амплітудний спектр (б)

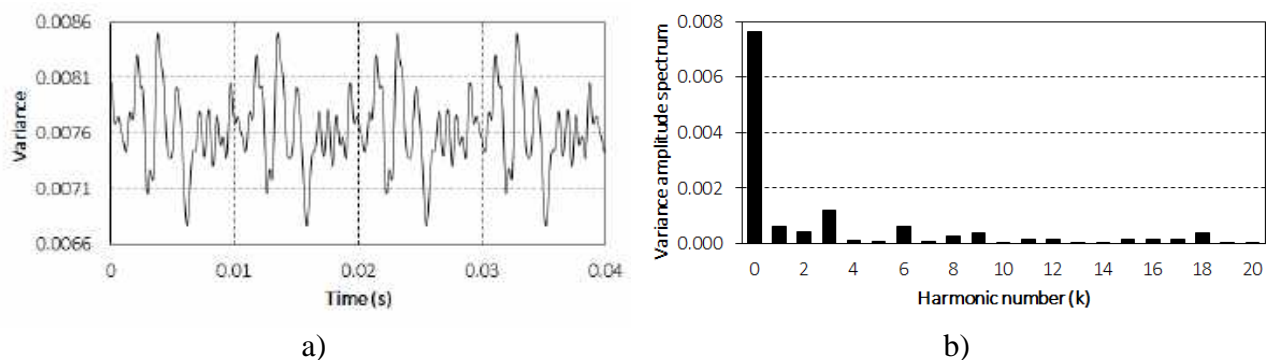


Рис. 6.3.11. Оцінка функції дисперсії сигналу 197 (а) та її амплітудний спектр (б).

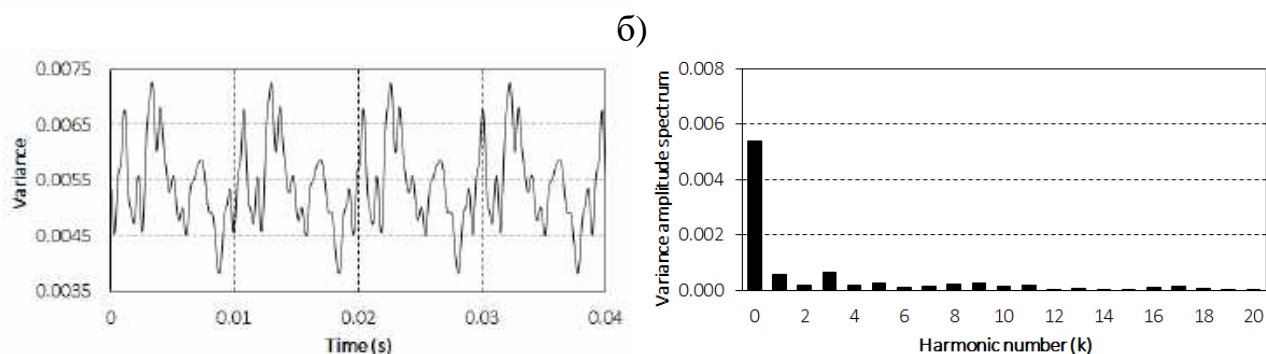
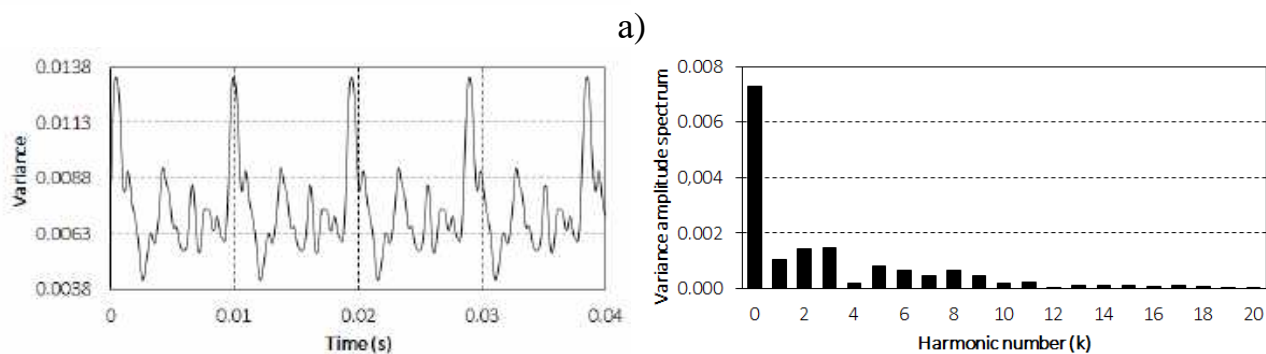
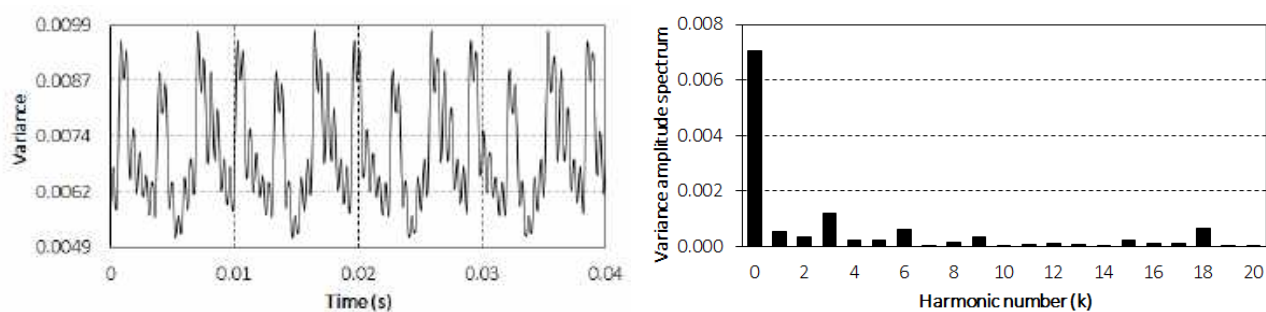


Рис. 6.3.12. Оцінки функцій дисперсії та їх амплітудні спектри для сигналів 198 (а), 199 (б) та 200 (в).

Отже часові зміни дисперсії сигналів викликані високочастотною модуляцією несучих гармонік ПНВС резонансними коливаннями. Ці зміни

можна прийняти як симптоматичну ознаку виникнення несправності. Таким чином, можна стверджувати, що для кожного розглянутого випадку виявлено пошкодження зовнішнього кільця підшипника. Базова частота дисперсії є основним параметром, який дозволяє визначити тип несправності, а її амплітудні спектри дають можливість визначити стадію її зростання. Таким чином показано [258] можливість виявляти та ідентифікувати дефекти в механізмах на ранніх стадіях розвитку на основі моделі ПНВС діагностичного сигналу, котрі не виявлялися відомими методами.

6.4 Застосування моделі ПНВС для раннього виявлення дефекту шляхом аналізу оптичного спекл- сигналу зображень

Двовірні спекл-сигнали (зображення) балкового зразка з матеріалу Д-16Т з концентратором напружень [238, 239] Рис.6.4.1 отримані камерою SONY XCD-910. Розмір зображень 1280x960 пікселів, “розмір” пікселя на поверхні зразка 20x20 мкм, динамічний діапазон сигналу – 0-255 одиниць яскравості. Бокові грані зразка оброблені піскоструминним методом для отримання розвиненої картини багатократного стохастичного розсіювання світла (спекл-сигналу). Освітлення зразка здійснювалося світлодіодом типу PROLIGHT PG1X-1LRS. Зразок навантажували за стандартною схемою трьохточкового навантаження при випробуваннях на тріщиностійкість [240, 241] послідовно від 0 до 150 кГс з кроком 5 кГс, зображення реєстрували при кожному кроці зростання навантаження. Схема навантаження представлена на Рис.6.4.2, спекл-зображення фрагмента зразка з концентратором напружень повернуте на 90° представлено на Рис. 6.4.3. На Рис. 6.4.4 наведено фрагмент сигналу в одному з стовбців зображення.

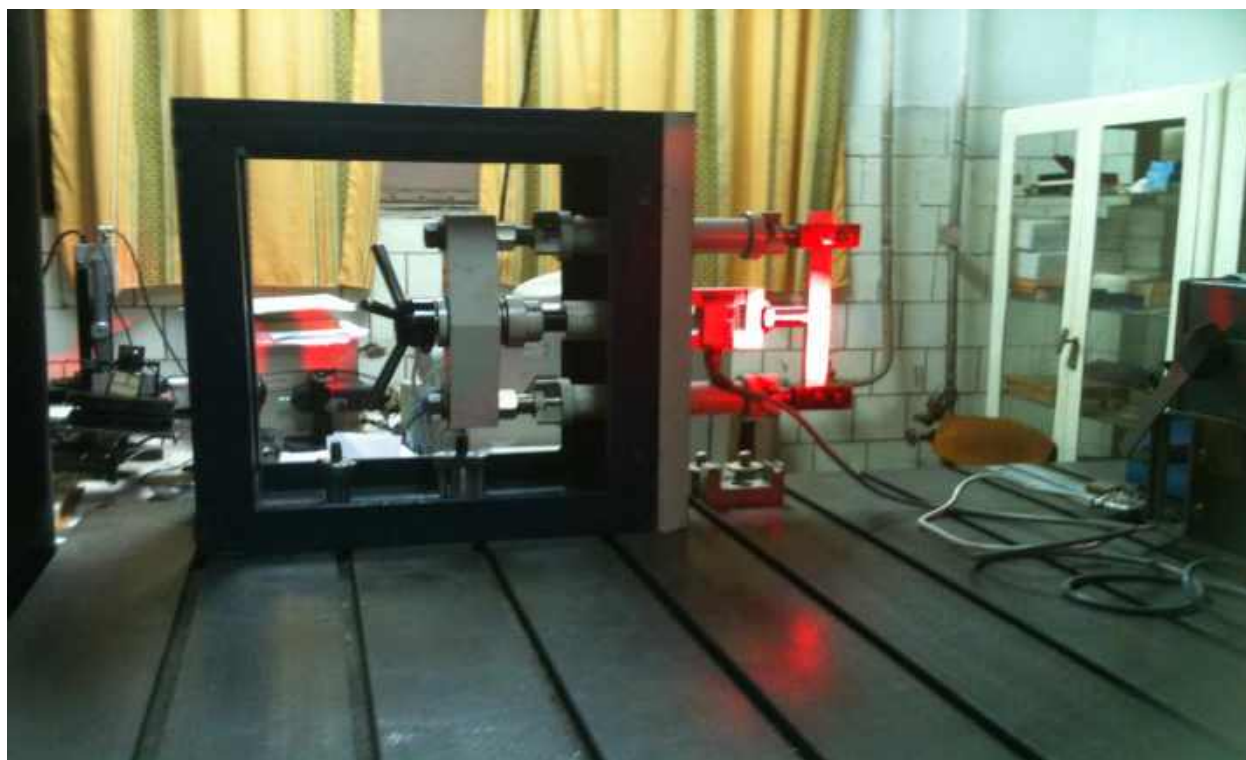


Рис.6.4.1. Навантажувальна система зі зразком.

Спекл-сигнал є стохастичним стаціонарним випадковим сигналом з неперервною спектральною густиною, верхня гранична частота і радіус кореляції якого задається відносним отвором оптичної системи [242].

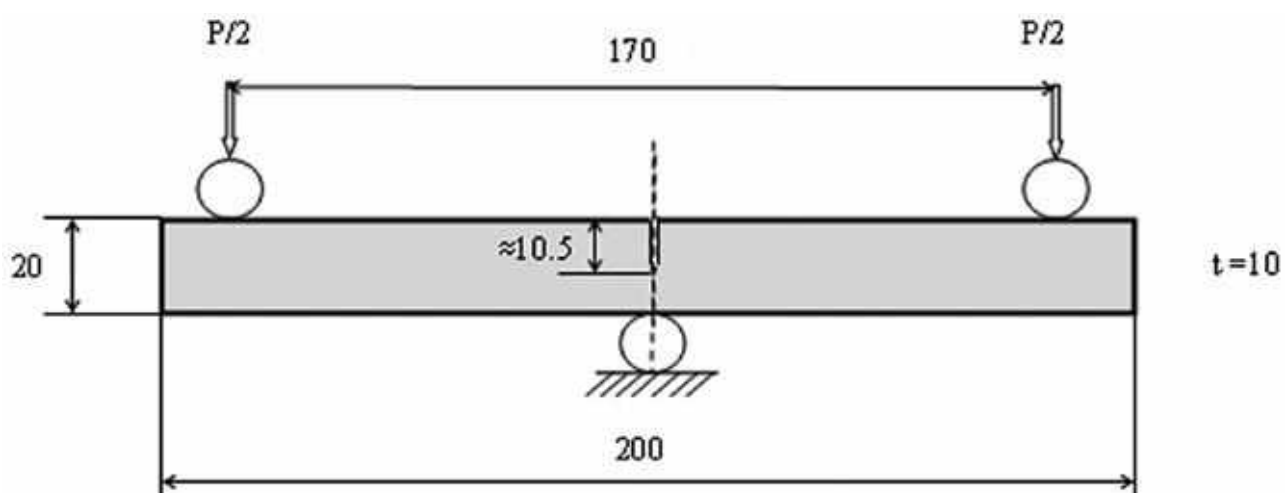


Рис. 6.4.2. Схема механічного навантаження зразка.

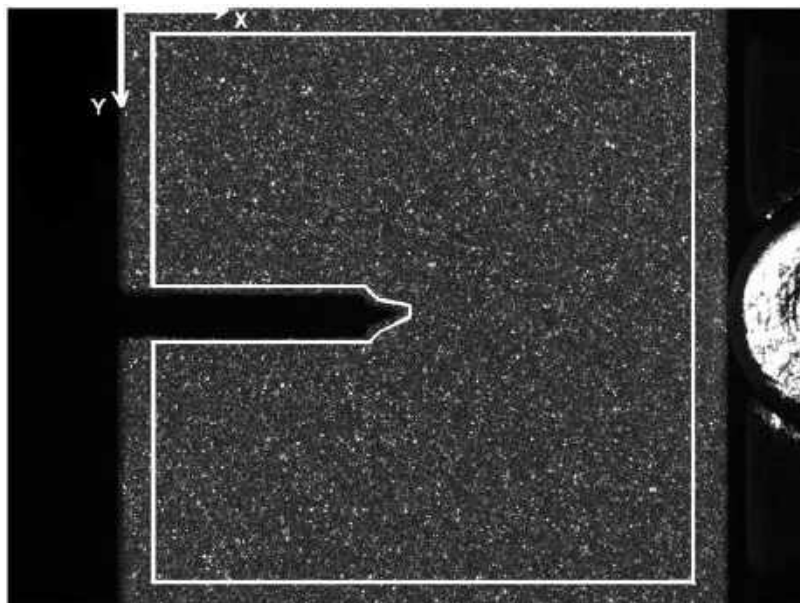


Рис. 6.4.3. Спекл-зображення центральної частини балки з концентратором з нанесеними межами області обробки спекл-сигналу.

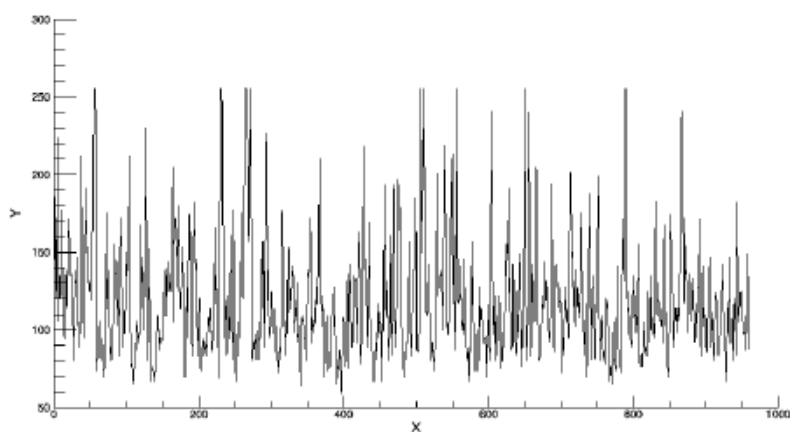
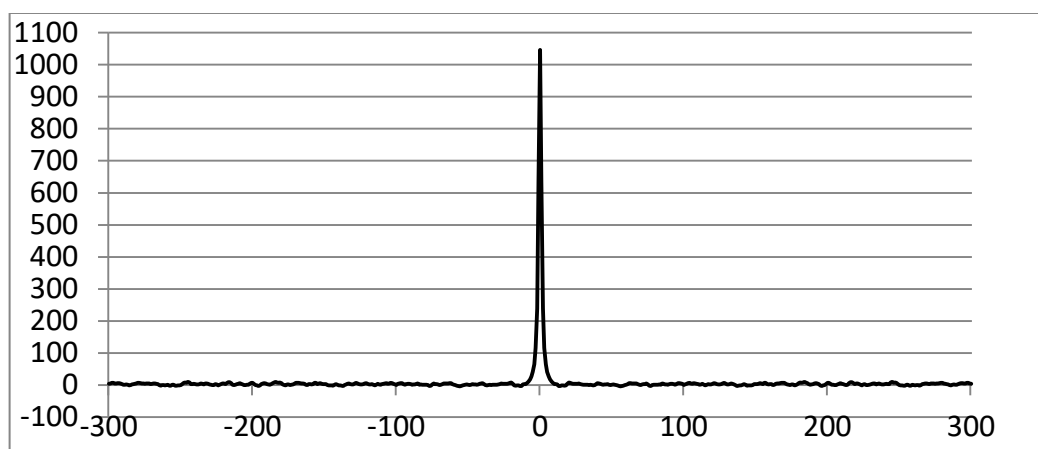
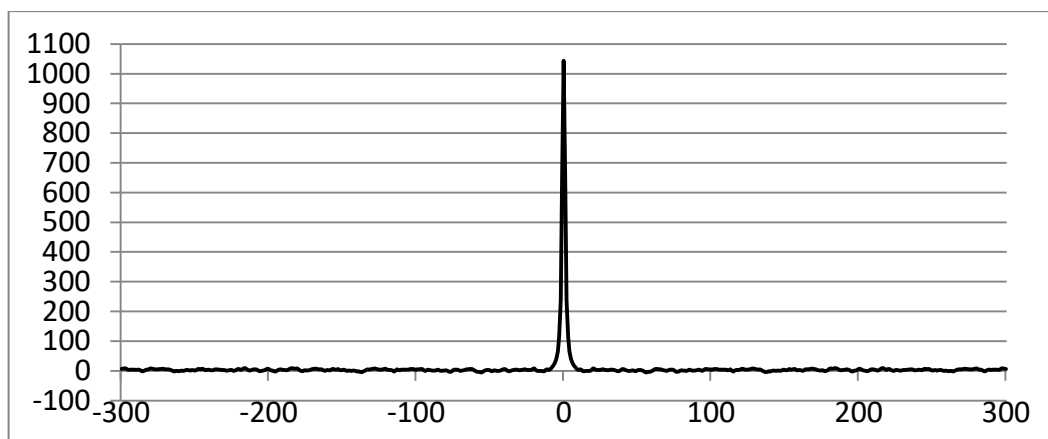


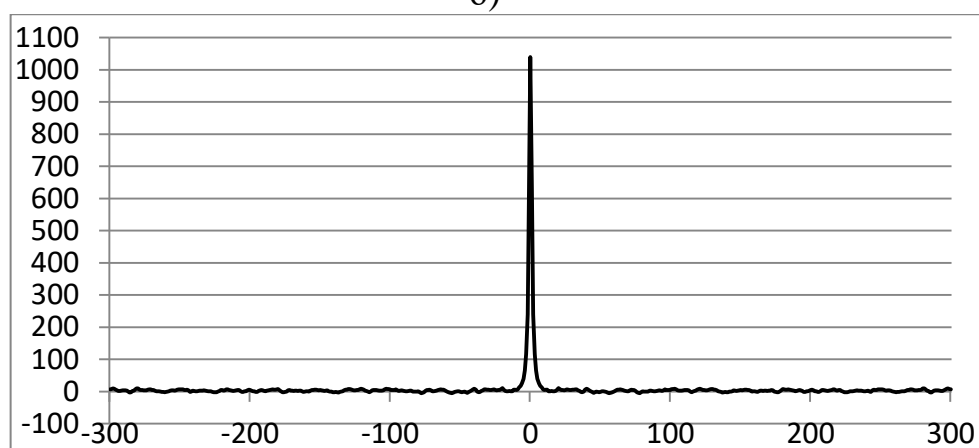
Рис. 6.4.4. Фрагмент спекл-сигналу у 650 вертикальному стовбці зображення.



а)



б)



в)

Рис.6.4.5. Автокореляційні функції спекл-сигналу за величини навантаження 0 кГс (а), 70кГс (б) та 150 кГс (в).

Прикладання навантаження та відповідна деформація зразка призводить до виникнення вузькосмугової взаємної фазової модуляції спекл-сигналу, котра виявляється різницевим методом. На Рис. 6.4.5 наведено автокореляційні функції спекл-сигналу в околі концентратора напружень для трьох величин навантаження зразка – 0 кГс, 75 кГс та 150кГс. Як видно з форми автокореляційних функцій Рис. 6.4.5 необроблений спекл-сигнал є чисто стаціонарний, незалежно від навантаження і фазова модуляція ніяк не проявляється.

Для визначення деформацій поверхні цього зразка було застосовано один з найбільш ефективних методів аналізу спекл-сигналів - цифрову кореляцію зображень (DIC). Суть DIC полягає у визначенні взаємного субпіксельного переміщення та лінійної деформації двох спекл-зображень за різних величин

навантаження шляхом прецизійного аналізу нормованої взаємної кореляційної функції малих фрагментів зображення (досягнення максимуму нормованого нульового кореляційного компонента) [243, 244]. Для цього використовується метод Ньютона-Рафсена (метод найменших квадратів у перших похідних) [243, 244]. Основною умовою застосування методу є стаціонарність спекл-сигналу в межах окремого фрагмента [245, 246]. Застосування методу призводить до швидкої збіжності з досягненням нормованого нульового компонента взаємної кореляції фрагментів величини $\geq 0,99$ [245, 246].

У роботах [247, 248] на основі цих сигналів з використанням програмного забезпечення VIC-2D та власного програмного забезпечення проведено визначення просторових розподілів полів деформацій та напружень а також отримані відповідні оцінки точності визначення параметрів розкладу полів напружень у ряди Вільямса [250, 251]. Порівняльний аналіз точності виявлення положення вершини тріщини [249] показав, що метод використаний у [247, 248] є найточнішим. Слід зазначити, що у ряді праць [240, 241, 247-249, 252, 253] на основі аналізу симульованих сигналів та обробки реальних даних було показано, що використання представлення рядами Вільямса полів напружень у матеріалі в околі вершини тріщини дозволяє з високою точністю оцінити координати вершини тріщини – тобто виявити та локалізувати дефект. Зокрема, було отримано оцінку випадкової складової похибки визначення координат положення вершини тріщини як параметра рядів Вільямса порядку 0,05%. Це дозволяє використати координати вершини тріщини у матеріалі в якості індикатора виявлення та оцінювання динаміки зародження та розвитку (поширення) дефекту (тріщини) в матеріалі. З іншої сторони, використання цього параметра дозволить оцінити чутливість кореляційного методу виявлення та оцінювання ступеня розвитку дефекту.

Стандартним критерієм [238, 239] старту та розвитку дефекту (поширення тріщини у матеріалі) є перевищення коефіцієнтом інтенсивності напружень (КІН) критичного значення (K_{IC}) в околі вершини тріщини. Оцінювання величини КІН, проведене на основі даних експерименту стандартним методом

за P-V діаграмою (Рис.6.4.6). Суть стандартного методу [238, 239] полягає у знаходженні точки перетину залежності розкриття концентратора напружень від навантаження з прямою, тангенс кута нахилу якої складає 0,95 від тангенса для лінійної ділянки цієї залежності.

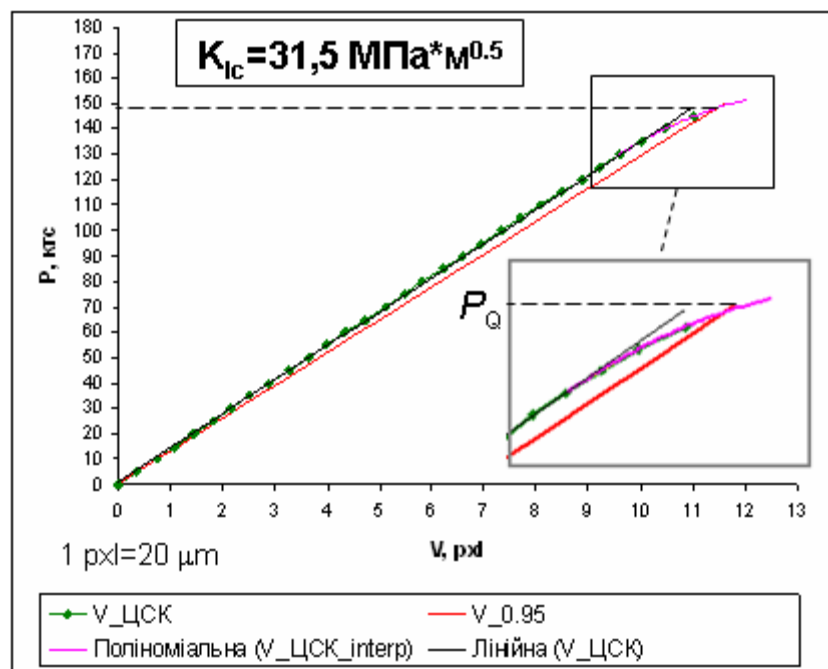
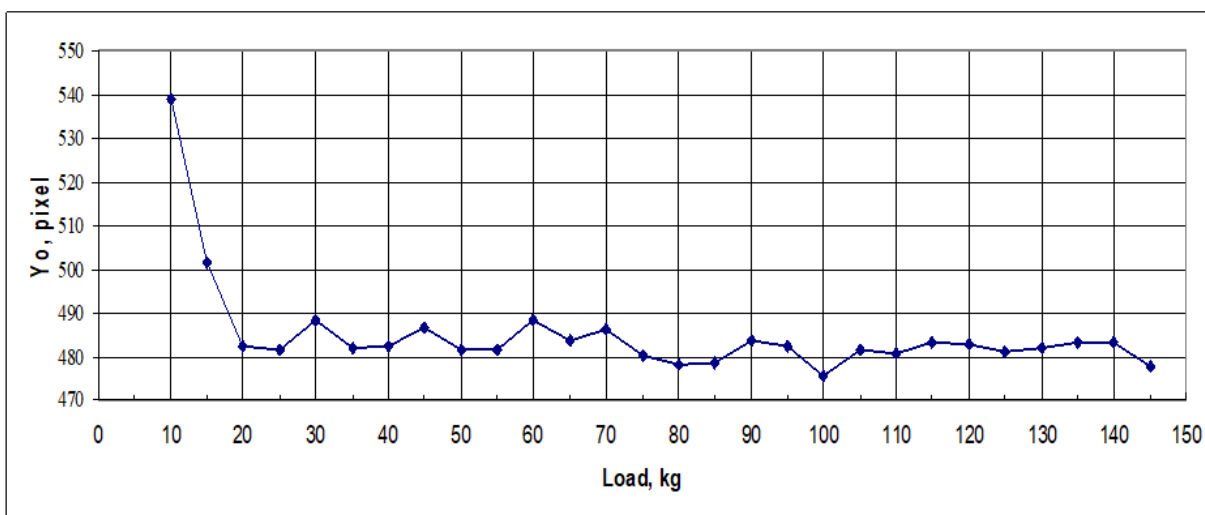
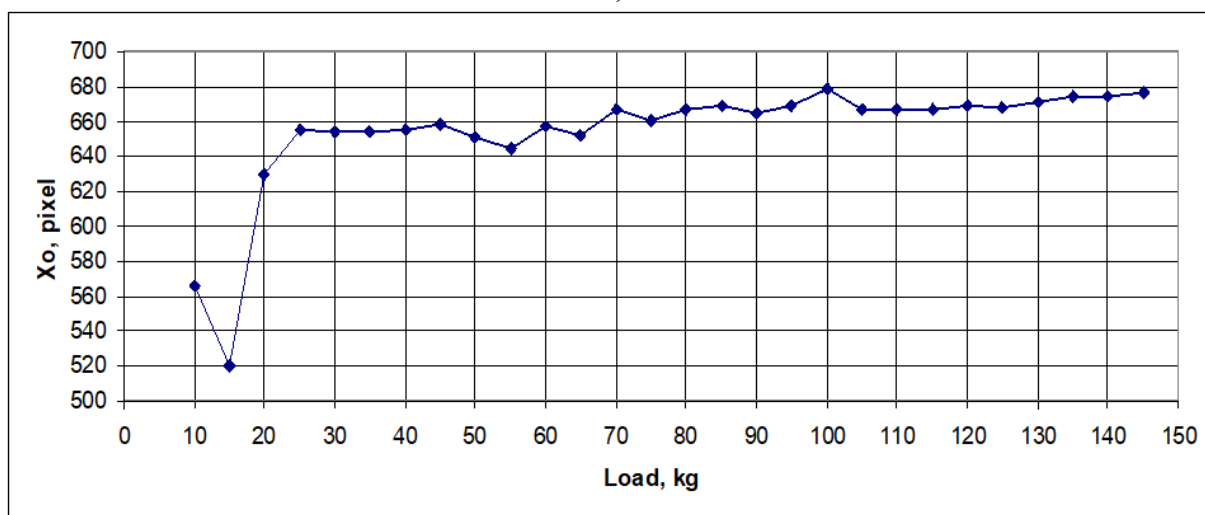


Рис.6.4.6. P-V діаграма визначення початку розвитку тріщини у зразку. По горизонталі відкладено розкриття концентратора на краю зразка у пікселях (розмір пікселя 20 мкм).

Тобто по суті критерієм є нелінійність поведінки зразка матеріалу (непропорційність реакції до величини навантаження), що викликана наявністю і розвитком дефекту типу тріщини. У результаті обробки експериментальних даних отримано величину K_{IC} 31,5 Мпа*м^{0,5} за величини статичного навантаження зразка 145 кГс, що у межах допустимої похибки відповідає нормативним параметрам матеріалу Д16-Т (32 Мпа*м^{0,5}). На основі даних спекл-зображень при розкладі полів напружень в матеріалі у ряди Вільямса до восьмого порядку включно [240, 241] було отримано залежності положення вершини тріщини у системі координат ХУ (Рис. 6.3.3) від величини навантаження показані на Рис. 6.4.7.



а)



б)

Рис. 6.4.7. Залежність координат вершини тріщини від навантаження зразка.

Як видно з Рис. 6.4.7 фактичний ріст вершини тріщини фіксується починаючи приблизно з величини статичного навантаження 70 кГс задовго до досягнення величини K_I критичного значення і навіть задовго до початку відхилення від лінійності стандартної P-V залежності (Рис. 6.4.6). Отримання такої точності визначення положення вершини тріщини стало можливим [240, 241] завдяки достовірному визначенню восьми членів розкладу поля напружень у матеріалі у ряд Вільямса, при тому що стандартні методи випробувань обмежені лише п'ятьма першими членами. При цьому складові полів напружень у матеріалі (Рис. 6.4.8) не демонструють жодної видимої нелінійності.

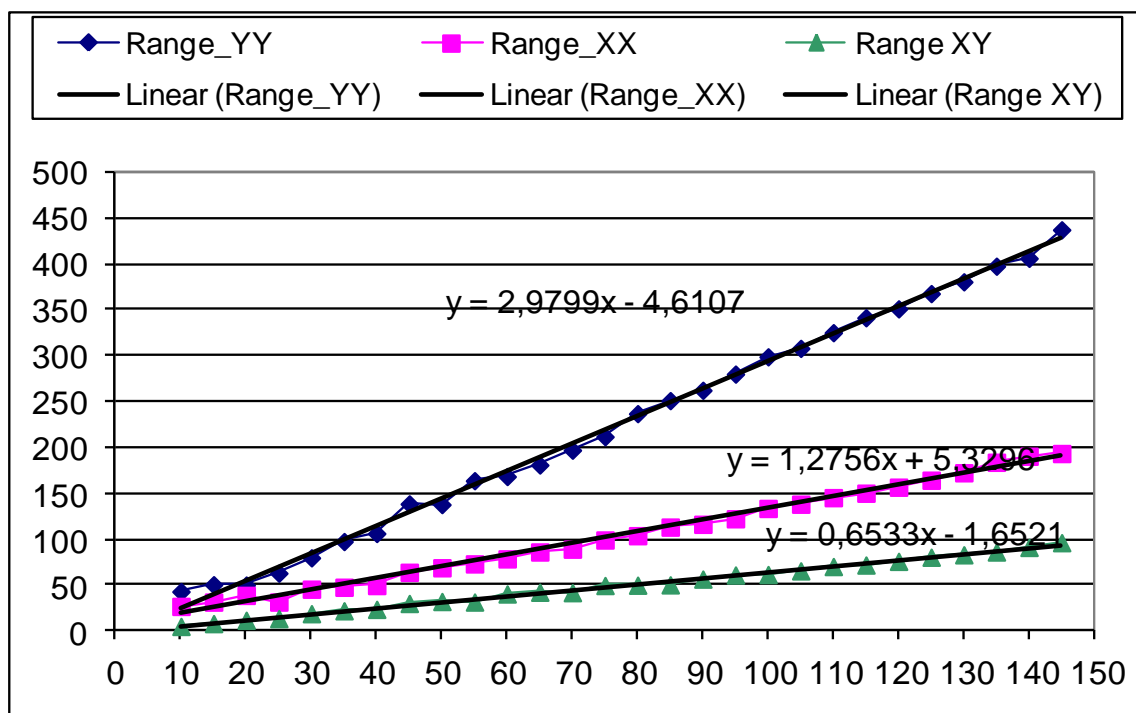


Рис. 6.4.8. Розмах компонентів поля напружень у матеріалі в залежності від величини навантаження.

Для виявлення та оцінювання дефектів на ранніх стадіях розвитку запропоновано ряд патентів [254-257] суть яких полягає у використанні взаємної кореляції фрагментів сигналів спекл-зображень для компенсації лінійно-пружної реакції матеріалу на навантаження (тобто регулярної складової сигналу) і аналізу різниці між досягнутим максимумом взаємкореляційної функції і його теоретично максимальним рівнем, аналізуючи тим самим вклад взаємкореляційних складових у ПНВС. Такі способи не вимагають прецизійного визначення полів деформацій та напружень у матеріалі, розкладу їх у ряди Вільямса для виявлення і оцінювання розвитку дефекту (тріщини) у матеріалі, натомість передбачають аналіз діагностичних сигналів як ПНВС. Було розроблено спеціалізоване програмне забезпечення для виділення компонентів вищих порядків нормованої кореляційної функції при обробці спекл-зображень, отриманих в процесі експерименту.

Процедура базується на кореляційному суміщенні малих фрагментів спекл-зображень стандартною процедурою DIC з урахуванням можливої

лінійно-пружної реакції матеріалу і реєстрації величини досягнутого максимуму їх нормованої взаємкореляційної функції. Теоретично максимально досяжна величина максимуму цієї функції, як відомо, рівна одиниці. Відсутність дефектів та урахування лінійно-пружної реакції матеріалу проявляється у стаціонарності взаємкореляційної функції спекл-сигналів фрагментів, отже максимум нормованої взаємкореляційної функції може досягнути в ідеальному випадку максимального теоретичного значення. Поява дефекту (нелінійної реакції матеріалу) призводить до нестаціонарності взаємкореляційної функції, отже енергія кореляцій перерозподіляється між нульовим кореляційним компонентом і компонентами вищих порядків, що спричиняє зменшення досягнутого максимуму. Тобто різницю між одиницею і величиною досягнутого максимуму взаємкореляційної функції (декореляцію) слід вважати мірою нестаціонарності сигналу. Тоді факт виявлення аномалії нестаціонарності є свідченням появи дефекту, місце розміщення аномалії є місцем локалізації дефекту а оцінка нестаціонарності – індикатором ступеня його розвитку. Цей метод за принципом оцінки ступеня розвитку дефекту є близьким до методу, представленого у підрозділі 6.1 з тою лише відмінністю, що кореляції визначені для малих фрагментів сигналу а не для сигналу в цілому і представлені у просторі сигналу а не у просторі частот. На Рис. 6.4.9 та 6.4.10 представлені відповідні просторові розподіли (карти) декореляції за різних величин навантаження зразка.

Як видно з Рис. 6.4.9, 6.4.10 на визначених кореляційних картах починаючи з величини навантаження 80 кГс з'являються потужні викиди, величина яких більше ніж на порядок перевищує фон. Всі аномальні викиди Рис. 6.4.9 і 6.4.10 локалізовані в околі зони непропорційності деформацій, визначеної на основі представлення полів напружень рядами Вільямса показаної на Рис. 6.4.11.

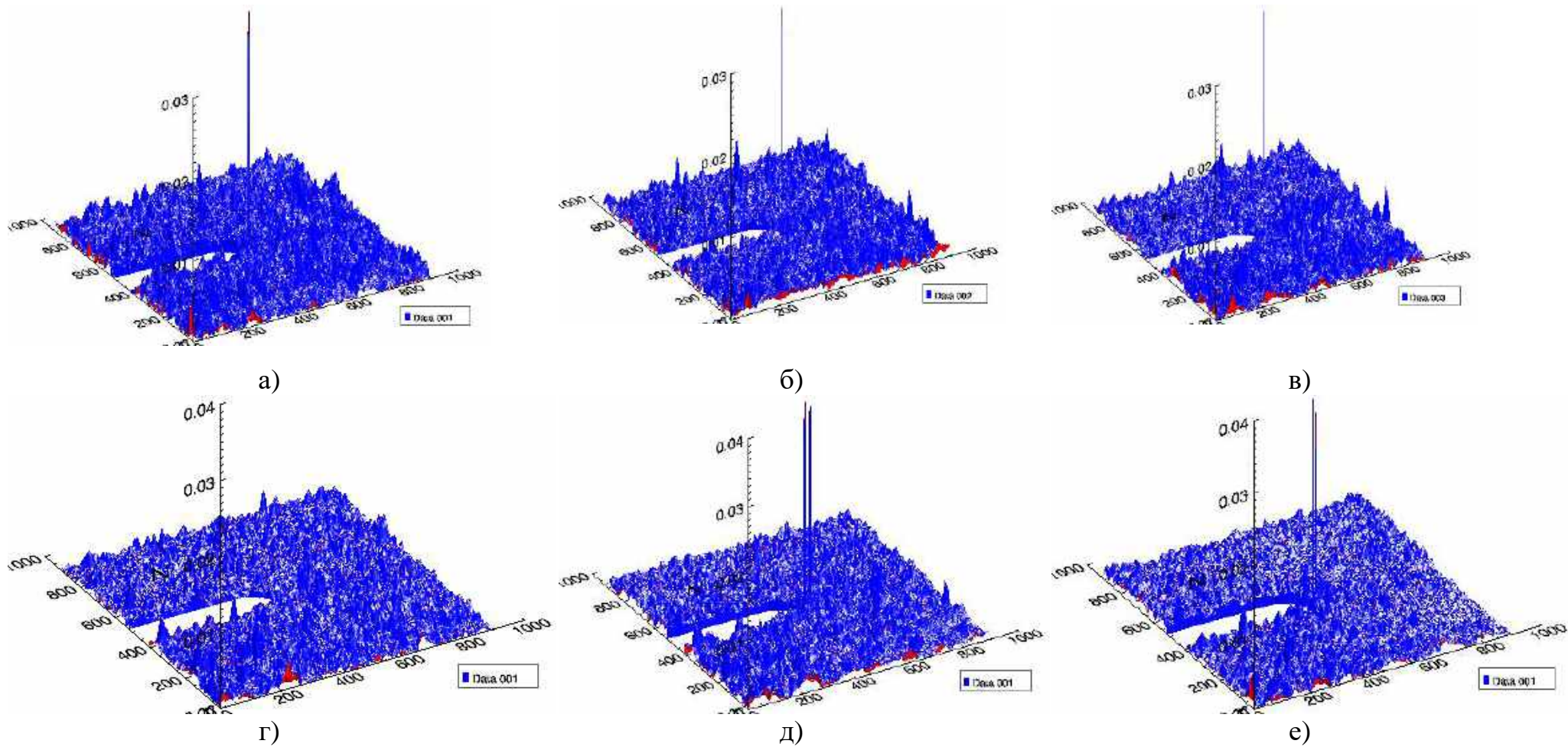


Рис. 6.4 9. Карты декореляції спекл-сигналу при статичному навантаженні:

80кГц (а), 90кГц (б), 100кГц (в), 105кГц (г), 110кГц (д), 115кГц (е)

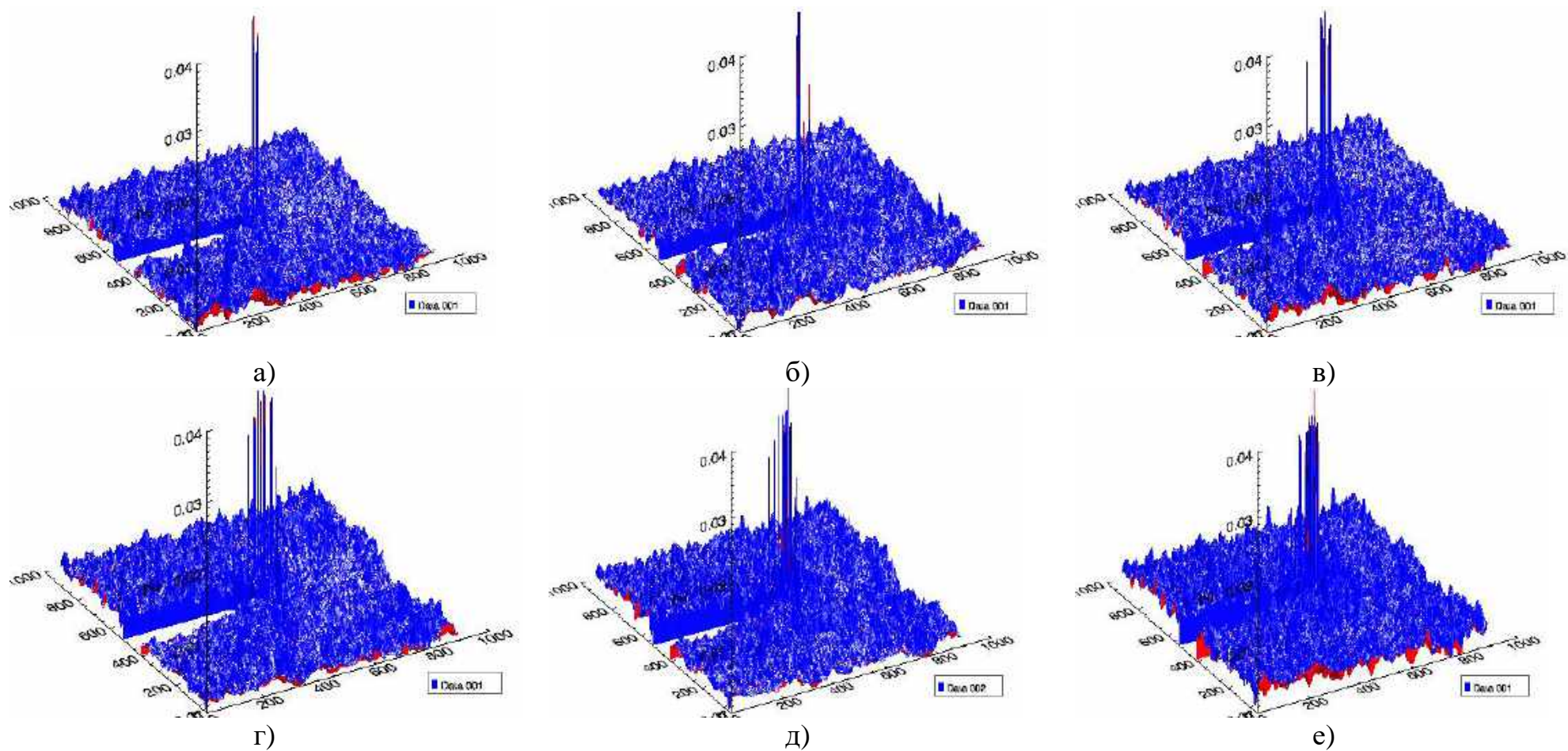


Рис. 6.4 10. Карты декореляції спекл-сигналу при статичному навантаженні:
 120кГц (а), 125кГц (б), 130кГц (в), 135кГц (г), 140кГц (д), 145кГц (е)

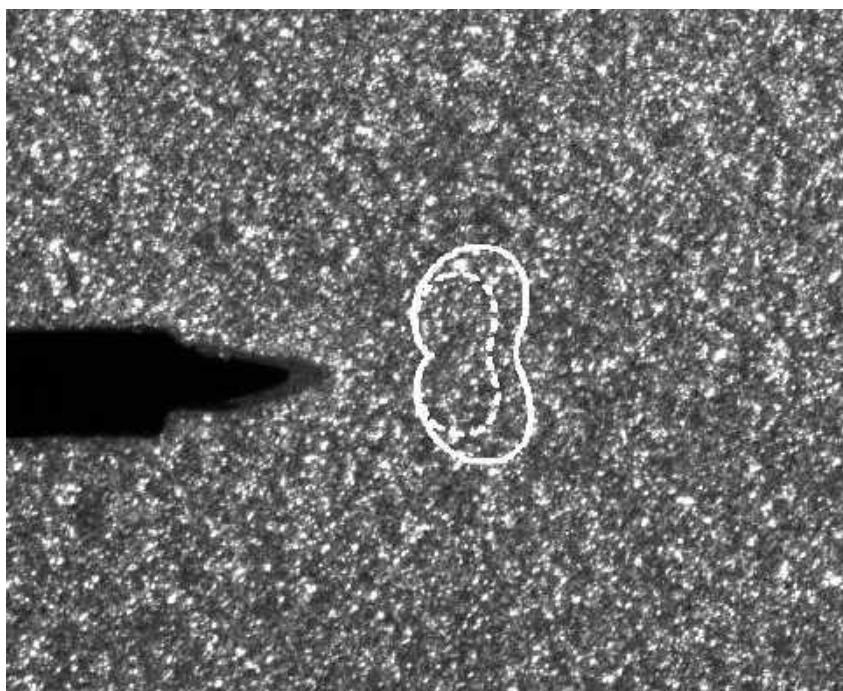


Рис. 6.4.11. Фрагмент центральної області спекл-сигналу з нанесеними межами зони непропорційних деформацій визначеної: за величиною КІН (суцільна) і за рядами Вільямса з 8 порядками (пунктир).

Сумарна потужність нестационарності кореляції наростає по мірі зростання навантаження. У Табл. 6.3.1 представлені оцінки нестационарності ПНВС спекл-сигналів, отримані з карт декореляції. Оцінка нестационарності отримана виходячи з величини порогу перевищення аномального значення декореляції над фоном згідно [254 255] більше ніж на порядок. На Рис. 6.4.12 наведено графіки залежностей оцінок нестационарності взаємкореляційної функції від навантаження. Як видно з Рис.6.4.12 (а) залежність сумарної величини складових вищих порядків від навантаження є суттєво нелінійною і її крутизна різко зростає з розвитком дефекту.

Таблиця 6.3.1. Оцінки параметрів нестационарності ПНВС спекл-сигналів зображень.

Навантаження, кГц	70	75	85	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145
Сигнал нестационарності (сума компонент вищих порядків)	0,00038	0,18681	0,25239	0,13683	0,11182	0,0602	0,43792	0,36137	0,92497	1,07197	1,68733	2,34792	2,72554	4,91633
Середній фон (нульова компонента)	0,00070	0,00071	0,00065	0,00039	0,00073	0,00046	0,000725	0,00066	0,00070	0,00072	0,00043	0,00070	0,00043	0,00069
Сигнал/фон (I)	0,5	263,5	389,9	350,2	152,7	130,1	612,7	550,6	1330,0	1495,8	3972,2	3337,7	6407,7	7129,0

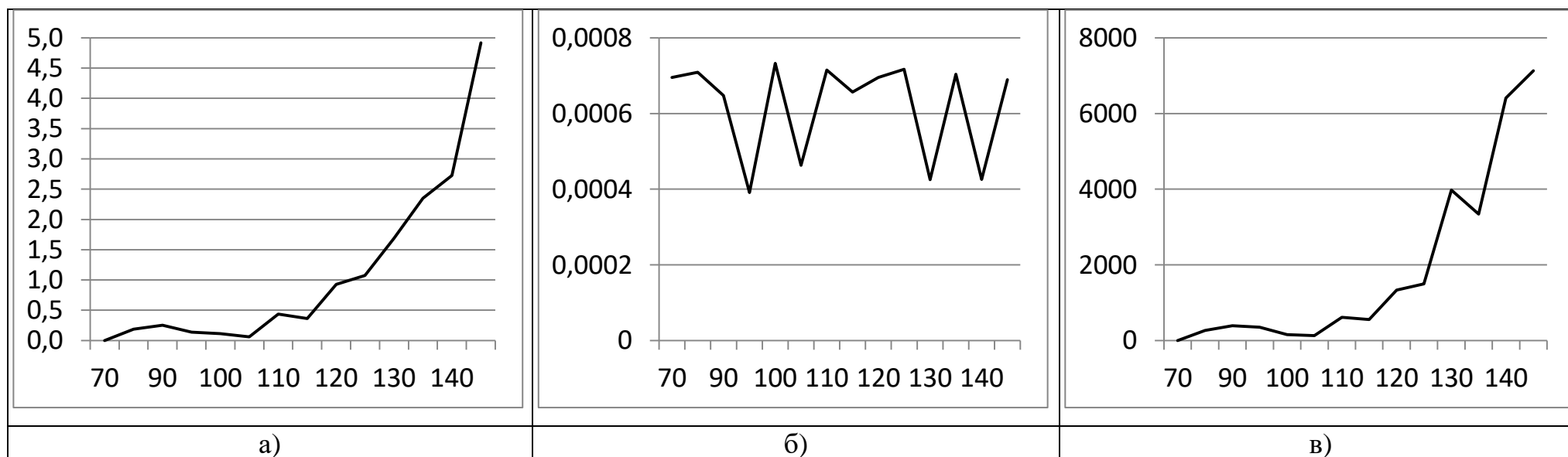


Рис. 6.4.12. Залежність параметрів нестационарності декореляції спекл-сигналу від навантаження: а) сума складових вищих порядків; б) нульова компонента; в) відношення суми компонент вищих порядків до нульової (індикатор нестационарності).

Разом з тим, середній фон (нульова складова декореляції) Рис.6.4.12 (б) залишається практично незмінною в процесі розвитку дефекту. Залежність індикатора нестационарності Рис.6.4.12 (в) також демонструє суттєве наростання крутизни при зростанні навантаження. Таким чином на основі запропонованих способів [254, 255] показана ефективність використання оцінок нестационарності взаємної кореляційної функції (індикатора нестационарності) діагностичних сигналів, що дозволяє виявляти, локалізувати та оцінювати ступінь розвитку дефекту на ранній стадії розвитку (у даному випадку – за величини навантаження приблизно вдвічі меншої ніж передбачена чинним стандартом [238, 239]). Перевагою методу розкладу полів напружень у ряди Вільямса є суттєво вища точність локалізації дефекту - по суті до мікронної точності. При цьому слід зауважити, що динамічні діапазони величин оцінки сумарної нестационарності і індикатора нестационарності мінються на порядок від точки виявлення дефекту до контрольної точки стандартного руйнування матеріалу що свідчить про високу чутливість запропонованого способу виявлення дефекту.

6.5. Висновки до розділу 6.

У розділі 6 проведено обробку реальних діагностичних сигналів на основі запропонованих методів та алгоритму аналізу ПНВС. Побудовано карти кореляцій ПНВС в просторі частот і в просторі сигналу та отримано оцінки сумарних кореляцій та потужностей корелюючих гармонік. Показано, що суми приростів взаємо кореляційних компонентів суттєво перевищують суми приростів їх потужностей. Отримано залежності індикаторів нестационарності ПНВС від ширини смуги фільтрованого вібраційного сигналу та ступеня розвитку дефекту, визначено оптимальну ширину смуги для діагностування механізму.

Смуга пропускання відфільтрованого сигналу повинна бути в три-чотири рази більшою за традиційно вибрану смугу пропускання. Більш широка

частотна смуга дозволяє залучати більшу кількість гармонік до квадратичного МНК-функціоналу для виявлення прихованих періодичностей другого порядку, і таким чином покращити його чутливість.

Показано можливість оцінювання стану та розвитку дефекта на зовнішньому кільці підшипника кочення з використанням запропонованих індикаторів стану. Показано можливість оцінювання ступеня розвитку дефекту на основі індикатора з урахуванням приросту амплітуд взаємокореляцій вищих складових. Продемонстровано можливість виявлення дефектів для яких кращі відомі методи нечутливі шляхом обробки тестових вібраційних сигналів на основі моделі ПНВС.

Проведено порівняння отриманих результатів з результатами методу “квадрату огинаючої” з використанням спектрального ексцесу для тих самих вхідних вібродіагностичних даних. Експериментально підтверджено неслухність оцінок методу “квадрату огинаючої”, оскільки його застосування та інтерпретація отриманих результатів виконана шляхом простого перенесення на ПНВС, що є широкосмуговим сигналом означень представлення сигналів у моделі Райса для найпростішого випадку, коли ширина спектру детермінованих квадратур суттєво менша за величину частоти гармоніки несучої. З іншої сторони, необґрунтоване звуження смуги частот сигналу, яке виконується для розрахунку спектра квадрата огинаючої, є також його недоліком, оскільки при цьому знижується кількість корельованих гармонік спектру сигналу при обробці та значення їх амплітуд.

Оскільки так званий “квадрат огинаючої” є ПНВС, то для обробки його реалізацій доцільно використовувати методики ПНВС, викладені у Розділі 5. Такий підхід можна розглядати як альтернативу для “методу огинаючої”, який традиційно використовується у вібраційному аналізі. Першим етапом цього підходу є пошук прихованих періодичностей. Він вирішується шляхом виявлення функцій періодичних змін у часі моментів першого та другого порядку та оцінювання їх періоду – визначення основної (базової) частоти. Метод найменших квадратів є найбільш ефективним для аналізу коливань, які

описують багатокомпонентними ПНВС. Знання періоду нестационарності дозволяє оцінювати та детально досліджувати кореляційні властивості коливань, які описуються коефіцієнтами Фур'є кореляційної функції. У цьому випадку перетворення Гільберта використовується для виділення квадратур несучих гармонік та аналізу їх авто- та взаємкореляційної структур.

Проведено порівняння запропонованого кореляційного методу оцінки нестационарності спекл-сигналу зображення поверхні зразка та стандартного P-V методу виявлення, локалізації та оцінювання ступеня розвитку тріщини у матеріалі. Показано можливість раннього виявлення та локалізації дефекту і високу чутливість запропонованого методу.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено важливу науково-прикладну проблему, котра полягає у розробці методів статистичного аналізу сигналів вібрацій пошкоджених механізмів на основі математичних моделей багатокomпонентних нестационарних випадкових процесів зі стохастичною амплітудно-фазовою модуляцією несучих гармонік і з використанням перетворення Гільберта досліджено їх кореляційно-спектральну структуру, що дає можливість встановлювати типи дефектів у механізмах, їх локалізацію та оцінювати ступінь розвитку.

1. Встановлено, що ранню стадію розвитку дефекту у нелінійній динамічній системі слід розглядати як нестационарний випадковий процес, що є результатом складної взаємодії періодичних, квазіперіодичних і стохастичних процесів та супроводжується появою прихованих періодичностей і проявляється при діагностуванні як періодично нестационарний випадковий сигнал. Означення ранньої стадії розвитку дефекту дало можливість сформулювати вимоги до побудови моделі сигналу та розробки методів його обробки.
2. Встановлено, що періодичні нестационарності другого порядку (приховані періодичності) є результатом взаємних кореляцій вищих порядків між модулюючими процесами ПНВС. Проведений порівняльний аналіз когерентних та компонентних методів виявлення прихованих періодичностей, що дозволило сформулювати підхід до їх пошуку та проведення аналізу кореляційно-спектральної структури ПНВС.
3. Проведено теоретичні дослідження, які показали слушність оцінок методами ПНВС функцій математичного сподівання, кореляційної функції та їх коефіцієнтів Фур'є. Встановлено, що частотний діапазон, в якому миттєва спектральна густина ПНВС змінюється за часом, визначається косинусними перетвореннями від косинусних і синусних кореляційних

- компонентів, що дозволило сформулювати вимоги до методу визначення періоду прихованої періодичності.
4. Показано, що визначення величини періоду нестационарності дає змогу обчислити весь комплекс характеристик першого і другого порядків ПНВС і тим самим повно описати структуру діагностичного сигналу, детально охарактеризувати властивості дефекту, визначити його параметри а також встановити критерії оцінювання ступеня розвитку дефекту.
 5. Розвинуто підхід до аналізу ПНВС з широкосмуговою, високочастотною, та амплітудно-фазовою модуляціями несучих гармонік на основі перетворення Гільберта. Встановлено, що кореляційна структура таких ПНВС і їх перетвореннями Гільберта є однаковими, тобто коефіцієнти Фур'є кореляційних функцій є однаковими а коефіцієнти Фур'є взаємокореляційних функцій відрізняються знаком.
 6. Досліджено властивості аналітичного сигналу для ПНВС і показано, що квадрат його модуля є ПНВП, і його потрібно аналізувати відповідними методами, тому його величину некоректно розглядати в якості квадрату огинаючої і аналізувати як детерміновану функцію.
 7. Показано, що у випадку вузькосмугової високочастотної модуляції несучих гармонік ПНВС може бути представлений у вигляді суперпозиції складових, що описуються моделлю Райса, кожна з яких є стаціонарним випадковим процесом і одночасно вони є взаємоперіодично нестационарно зв'язаними випадковими процесами. Виявлені властивості призводять до періодичної нестационарності сигналу та відповідного аналітичного сигналу. Коефіцієнти Фур'є їх кореляційних функцій визначаються авто- та взаємокореляційними функціями квадратур.
 8. Показано, що квадратури високочастотних компонент можуть бути виділені з використанням смугової фільтрації і перетворення Гільберта, і на основі отриманих часових рядів квадратур можуть бути обчислені їх авто- та взаємокореляції. Побудова карт кореляцій та аналіз їх структури, можуть бути використані для розділення та ідентифікації джерел сигналу,

локалізації дефекту та визначення його типу. Запропоновано індикатори для оцінки ступеня розвитку дефекту, який визначається як відношення модуля взаємкореляцій вищих порядків модуляції до їх потужності.

9. Показано, що розподілений та локалізований дефекти проявляються в характері часових змін моментних функцій ПНВС. Часові зміни дисперсії, що описують потужність стохастичних вібрацій є симптоматичною ознакою для виявлення пошкоджень. Амплітудний спектр часових змін характеризує ступінь розвитку різних типів дефектів, для випадку розподіленого дефекту спектр вузький, а для випадку локалізованого дефекту є суттєво ширшим і може містити декілька десятків гармонік.
10. Показано, що вібрації для обох типів дефектів представляються суперпозицією вузькосмугових високочастотних компонент, які є стаціонарними і взаємно періодично нестаціонарними випадковими процесами. Виділені з використанням смугової фільтрації і перетворення Гільберта квадратури високочастотних компонент дозволили обчислити їх авто- та взаємкореляційні функції і побудувати карти кореляцій. Отримані карти є основою для вибору ширини смуги частот при обробці сигналу для виявлення та аналізу дефекту.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. ISO 17359:2011 Condition monitoring and diagnostics of machines, General guidelines. International Organization for Standardization (ISO), ed, 2011.
2. IEC 60300-3-1 Dependability management. Part 3.1: Application guide, Analysis techniques for dependability, Guide on methodology. International Electrotechnical Commission, 2003.
3. ISO 13372:2004(E) Condition monitoring and diagnostics of machines- vocabulary. International Organization for Standardization (ISO), 2004.
4. ДСТУ 2860-94 Державний стандарт України. Надійність техніки. Терміни та визначення.
5. Vogl G.W., Weiss B.A., Donmez M.A. NISTIR 8012 Standards Related to Prognostics and Health Management (PHM) for Manufacturing: National Institute of Standards and Technology U.S. Department of Commerce.
6. Del Grosso A. Structural Health Monitoring: research and practice Conference Paper September 2013 Second Conference on Smart Monitoring, Assessment and Rehabilitation of Civil Structures (SMART-2013), (www.researchgate.net/publication/261119109).
7. Rouhan A., Schoefs F. Probabilistic modeling of inspection results for offshore structures. *Structural Safety*, 25, 2003, 379–399.
8. Cheng Su, Wei Liao; Lin Tan, Ran Chen. Reliability-Based Damage Identification Using Dynamic Signatures. *J. Bridge Eng.*, 2016, 21(3).
9. Del Grosso A.E. and Lanata F. Reliability estimate of damage identification algorithms. *Reliability Engineering and Risk Management* (3), Y.G. Zhao, J. Li, Z.H. Lu, T. Saito eds., Central South University Press, Shanghai. 2012, 350–355.
10. Shafer G.A. *Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.
11. Orcesi A, Frangopol D. Optimization of Bridge Maintenance Strategies based on Structural Health Monitoring Information. *Structural Safety*, 2010, 33, 26–41.

12. ДСТУ ISO 13379-1:2015 Моніторинг і діагностика стану машин. Інтерпретація даних і технічна діагностика. Частина 1. Загальні настанови (ISO 13379-1:2012, IDT).

13. ДСТУ CEN ISO/TS 25107:2022 Неруйнівний контроль. Настанови щодо програм навчання методам неруйнівного контролю (CEN ISO/TS 25107:2019, IDT; ISO/TS 25107:2019, IDT).

14. ДСТУ EN ISO 9712:2022 Неруйнівний контроль. Кваліфікація та сертифікація персоналу неруйнівного контролю (EN ISO 9712:2022, IDT; ISO 9712:2021, IDT).

15. Czichos H. Handbook of Technical Diagnostics. Fundamentals and Application to Structures and Systems. Springer Berlin, Heidelberg Hardcover ISBN978-3-642-25849-7 Published: 09 January 2013 566p. Cowan R., Winer W. 2020.

16. Machinery Diagnostics: Fundamentals and Tribosystem Applications. In: Czichos, H., Habig, KH. (eds) Tribologie-Handbuch. Springer Vieweg, Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-29484-7_23 doi.org/10.1007/978-3-642-25850-3

17. Gharehbaghi V.R., Farsangi N., Noori M. et al. A Critical Review on Structural Health Monitoring: Definitions, *Methods, and Perspectives*. *Arch Computat Methods Eng*, 2022, 9, 2209–2235. <https://doi.org/10.1007/s11831-021-09665-9>.

18. Lederer P. Sensor Handbook for Automatic Test, Monitoring, Diagnostic, and Control Systems Applications to Military Vehicles and Machinery. Center for Electronics and Electrical Engineering National Engineering Laboratory National Bureau of Standards Washington, DC 20234 U.S. Army Material Command CORADCOM/DRDCO-TCS Fort Monmouth, NJ 07703 National Bureau of Standards Special Publication 615 Nat. Bur. Stand. (U.S.), Spec. Publ. 615, 450 p. (Oct. 1981).

19. Advanced Signal Processing Handbook: Theory and Implementation for Radar, Sonar, and Medical Imaging Real Time Systems (Electrical Engineering &

Applied Signal Processing Series) Stergios Stergiopoulos (Editor) CRC Press; 1st edition (21 Dec. 2000) ISBN-13: 978-0849336911, 752 p.

20. Dragan Y.P., Sikora L.S., Yavorskiy B.I. Specificity of Information Content of Periodically Correlated and Other Compatible Random Processes as Stochastic Models of Rhythmics. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2000, 32 (3), 73–84. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v32.i3.100

21. Gardner W.A. Introduction to random processes with applications to signals and systems, New York: Macmillan, 1985.

22. Gardner W.A. The spectral correlation theory of cyclostationary time-series. *Signal Processing*, 1986, 11(1), 13–36.

23. Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1987, 320 с.

24. Cyclostationarity in Communications and Signal Processing, Ed. By W.A. Gardner, New York: IEEE Press, 1994, 504 p.

25. Hurd H. L., Miamee A. Periodically Correlated Random Sequences. Spectral Theory and Practice. New Jersey: Wiley-Interscience, 2007. 353 p.

26. Napolitano A., Generalizations of Cyclostationary Signal Processing: Spectral Analysis and Applications. John Wiley & Sons, Ltd. IEEE Press, 2012.

27. Яворский И.Н. Применение схемы Бюй-Балло при статистическом анализе ритмических сигналов. *Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника*, 1984, 27(11), 31–37.

28. Яворский И.Н. О статистическом анализе периодически коррелированных случайных процессов. *Радиотехника и электроника*, 1985, 6, 1096–1104.

29. Gardner W.A. Statistical Spectral Analysis: A Nonprobabilistic Theory, New York: Pronstice Hall, Englewood Cliffs, 1987, 566 p.

30. Hurd H.L. Periodically correlated processes with discontinuous correlation functions. *Theory Probab. Appl.*, 1974, 19(4), 834–838.

31. Задачи термочности, вибродиагностики и ресурса энергетических агрегатов: Н.Г. Шульженко, П.П. Гонтаровский, Б.Ф. Зайцев. Харьков: ХНАДУ, 2011, 444 с.

32. Hurd H.L. Correlation theory of almost periodically correlated processes. *J. Multivariate Anal.*, 1991, 37, 24–45.

33. Ogura H. Spectral representation of a periodic nonstationary random process. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1971, 17(2), 143–149.

34. Марченко Б.Г., Мислович М.В. Вибродіагностика підшипникових вузлів електричних машин. Київ: Наукова думка, 1992, 195 с.

35. Коронкевич О.І. Спектральний розклад періодичних та майже періодичних випадкових функцій. *Доп. АН УРСР. Сер. А.*, 1974, 114–117.

36. Гудзенко Л.И. О периодически нестационарных процессах. *Радиотехника и электроника*, 1959, 4(6), 1062–1064.

37. Гудзенко Л.И. Обобщение эргодической теоремы на нестационарные случайные процессы. *Изв. ВУЗов. Радиофизика*, 1961, 4(2), 265–274.

38. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы по теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961, 559 с.

39. Гладышев Е.Г. О периодически коррелированных случайных последовательностях. *Докл. АН СССР*, 1961, 137(5), 2236–2239.

40. Драган Я.П. О представлении периодически коррелированного случайного процесса через стационарные компоненты. *Отбор и передача информации*, 1975, 45, 7–20.

41. Antoni J. Cyclostationarity by examples. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, 23, 987–1036.

42. Antoni J., Bonnardot F., Raad A., Badaoui El. Cyclostationary modeling of rotating machine vibration signals. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2004, 18, 1285–1314.

43. Antoni J. Blind separation of vibration components: principles and demonstrations. *Mechanical System and Signal Processing*, 2005, 19, 1166–1180.

44. Яворський І. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. Львів Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка, 2013, ISBN 978-966-02-6994-1, 800 с.

45. Abboud D., El Badaoui M., Smith W., Randall R. Advanced bearing diagnostics: A comparative study of two powerful approaches. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 114, 2019, 604–627. doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.05.011.

46. Randall R., Antoni J. Rolling element bearing diagnostics -A tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, 25(2), 485–520. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.07.017>.

47. Dong Wang, Xuejun Zhao, Lin-Lin Kou, Yong Qin, Yang Zhao, Kwok-Leung Tsui. A simple and fast guideline for generating enhanced/squared envelope spectra from spectral coherence for bearing fault diagnosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 122, 754–768. doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.12.055

48. Bedrosian E. A product theorem for Hilbert Transform. *Proceedings of the IEEE*, 1963, 51, 868–869.

49. Nuttall A.H., Bedrosian E. On the quadrature approximation to the Hilbert Transform of modulated signal. *Proceedings of the IEEE*, 1966, 54(10), 1458–1459.

50. Feldman M. Theoretical analysis and comparison of the Hilbert transform decomposition methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2008, 22(3), 509–519.

51. Feldman M. Hilbert transform applications in mechanical vibration. John Wiley. 2011.

52. Huang N.E., Shen Z., Long S.R., et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. London: Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1998. 454. 903–995.

53. Huang N., Wu Z. A review on Hilbert-Huang transform: Method and its applications to geophysical studies. *Reviews of Geophysics*, 2008, 46, 1–23.

54. Cheng Junsheng, Yu Dejie, Yang Yu. A fault diagnosis approach for roller bearings based on EMD method and AR model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2006, 20, 350–362. doi.org/10.1016/j.ymssp.2004.11.002.

55. Bendat J.S. The Hilbert transform and applications to correlation measurements. Denmark : Bruel & Kjer. 1985.
56. Hahn S.L. Hilbert transform in signal processing. Artech House. 1996.
57. Vakman D. Signal, oscillations, and waves. Boston. London: Artech House. 1998.
58. King F.W. Hilbert transforms: Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge : Cambridge. 2009.
59. Clough R., Penzien J. Dynamics of structures, third edition. Computers & Structures, Inc. 1995 University Ave. Berkeley, CA 94704 USA TA654.C6 2003.
60. Engineering Dynamics and Vibrations Recent Developments Junbo Jia, Jeom Kee Paik Editors, CRC Press Taylor & Francis Group 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300 Boca Raton, FL 33487–2742, 2019.
61. Paz M., Kim Y. Structural Dynamics Theory and Computation Sixth Edition, Springer Nature Switzerland AG, ISBN 978-3-319-94742-6, 2019. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-94743-3>
62. Isermann R. Fault-Diagnosis Applications Model-Based Condition Monitoring: Actuators, Drives, Machinery, Plants, Sensors, and Fault-tolerant Systems Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011, ISBN 978-3-642-12766-3 DOI 10.1007/978-3-642-12767-0
63. ISO IEC 90003 2005 Quality management systems. Fundamentals and vocabulary. 2005.
64. Межгосударственный стандарт ГОСТ 15467-79 "Управление качеством продукции. Основные понятия. Термины и определения".
65. Haken H. Synergetics An Introduction Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry and Biology Second Enlarged Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1978.
66. Haken H. Hermann Haken Advanced Synergetics: Instability Hierarchies of Self-Organizing Systems and Devices Springer; Softcover reprint of the original 1st ed. 1983 edition (March 3, 2012) ISBN 978-3642455551

67. Kuznetsov Yu. Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition Applied mathematics series; 112, Springer-Verlag New York, 1998. ISBN 0-387-98382-1.

68. Izmailov A.F. On the Andronov-Hopf Bifurcation Theorem. *Differential Equations*, 2001, 37(5), 640–646. DOI:10.1023/A:1019260414080

69. Hirschberg P., Knobloch E. Sil'nikov-Hopf Bifurcation. *Physica D*, 1993, 62, 202–216.

70. Munoz-Alicea R. Introduction to Bifurcations and The Hopf Bifurcation Theorem, Dynamics at the Horsetooth 2011. Department of Mathematics Colorado State University.

71. Feckan M., Pospisil M. On the Bifurcation of Periodic Orbits in Discontinuous Systems. *Communications in Mathematical Analysis*, 2010, Special Volume in Honor of Prof. Peter D. Lax, 8(1), 87–108. ISSN 1938–9787.

72. Bernardo M., Budd C., Champneys A., Kowalczyk P., Nordmark A., Tost G., Piiroinen P. Bifurcations in Nonsmooth Dynamical Systems Society for Industrial and Applied Mathematics. *SIAM Review*, 2008, 50(4), 629–701. DOI: 10.1137/050625060

73. Luongo A., Zulli D. A paradigmatic system to study the transition from zero/Hopf to double-zero/Hopf bifurcation. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 70, 111–124. Springer Science+Business Media B.V. DOI 10.1007/s11071-012-0435-x

74. Guckenheimer J., Meerkamp Ph. Unfoldings of Singular Hopf Bifurcation. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2012, 11(4), 1325–1359. DOI:10.1137/11083678X

75. Franca M., Johnson R. On the non-autonomous Hopf bifurcation problem: systems with rapidly varying coefficients Electronic. *Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2019, 56, 1–24. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2019.1.56>

76. Feckan M. Bifurcation of multi-bump homoclinics in systems with normal and slow variables. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2000, 41, 1–17. ISSN: 1072-6691.

77. Cima A., Gasull A., Manosa V. Bifurcation of 2-periodic orbits from non-hyperbolic fixed points. *J. Math. Anal. Appl.*, 2018, 457, 568–584. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.08.029]

78. Guckenheimer J., Xiang Y. Defining Equations for Bifurcations and Singularities. *Moscow Mathematical Journal*, 2003, 3(3). DOI: 10.17323/1609-4514-2003-3-3-935-946.

79. Franca M. Bifurcation diagrams for singularly perturbed system. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2012, 78, 1–23.

80. Luo A. Bifurcations and Saddle-Sink-Source Networks in Variable-Independent Quadratic Systems. *Journal of Vibration Testing and System Dynamics*, 2023, 7(1), 59–112.

81. Luo A. Dynamics and bifurcations in a quadratic nonlinear system with univariate product vector fields. *Journal of Vibration Testing and System Dynamics*, 2023, 7(3), 327–397.

82. Luo A. Bifurcations and saddle-limit cycle networks in crossing-variable quadratic systems. *Journal of Vibration Testing and System Dynamics*, 2023, 7(2), 187–252.

83. Luo A. Dynamics and bifurcations in a quadratic nonlinear system with univariate product vector fields. Part 1. *Journal of Vibration Testing and System Dynamics*, 2023, 7(3), 327–397. DOI:10.5890/JVTSD.2023.09.006

84. Luo A. Dynamics and bifurcations in a quadratic nonlinear system with univariate product vector fields, Part II. *Journal of Vibration Testing and System Dynamics*, 2024, 8(1), 77–154.

85. Jean-Pierre Françoise Poincaré–Andronov–Hopf Bifurcation and the Local Hilbert's. *16th Problem Qual. Theory Dyn. Syst.*, 2012, 11, 61–77. DOI: 10.1007/s12346-012-0071-3

86. Mondal A., Islam N. Study on Dynamical System with Time-delay. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 2016, 5(4), 441–456.

87. Tsitsiashvili G. Study of Synergistic Effects in Complex Stochastic Systems. *Mathematics*, 2021, 9, 1396. doi.org/10.3390/math9121396

88. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Hidden attractors in dynamical systems. from hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in chua circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, 23(1), 1330002. DOI: 10.1142/S0218127413300024

89. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagaitsev V.I. Hidden attractor in smooth Chua systems. *Physica D*, 2012, 241, 1482–1486.

90. Kuznetsov N., Kuznetsova O., Leonov G., Vagaitsev V. Analytical-Numerical Localization of Hidden Attractor in Electrical Chua's Circuit. In: Ferrier, J.L., Bernard, A., Gusikhin, O., Madani, K. (eds) Informatics in Control, Automation and Robotics. Lecture Notes in Electrical Engineering, 2013, 174, Springer, Berlin, Heidelberg.

91. Negrini P. and Salvadori L. Attractivity and hopf bifurcation. *Nonlinear Analysis: Theory. Methods & Applications*, 1979, 3(1), 87–99.

92. Gumowskii I., Mira C. Sensitivity Problems Related to Certain Bifurcations in Non-Linear Recurrence Relations. *Automatica*, 1969, 5, 303–317.

93. Ji J. Chapter 2. Implicit resonances in time-delayed nonlinear systems, Editor(s): Hamid Reza Karimi In Emerging Methodologies and Applications in Modelling, Vibration Control and Actuation of Large-Scale Systems, Academic Press, 2020, Pages 31–55, ISBN 9780128211946, doi:10.1016/B978-0-12-821194-6.00002-0.

94. Harlim J., Langford W.F. The Cusp-Hopf Bifurcation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, 17(8), 2547–2570.

95. Himadri S. Samanta, Jayanta K. Bhattacharjee, Arijit Bhattacharyay, and Sagar Chakraborty On noise induced Poincaré-Andronov-Hopf bifurcation Chaos: An Interdisciplinary. *Journal of Nonlinear Science*, 2014, 24, 043122. doi: 10.1063/1.4900775

96. Dankowicz H., Nordmark A. On the origin and bifurcations of stick-slip oscillations. *Physica D*, 2000, 136, 280–302.

97. Sarmah H., Baishya T., Bhattacharjee D., Das M. Quasi-periodicity and mode-locking in Maynard Smith map. *International Journal of Advanced Scientific and Technical Research*, 2013, 3(6), 37–54.

98. Luo A. Local Stability and Bifurcations. In: *Bifurcation and Stability in Nonlinear Discrete Systems*. Nonlinear Physical Science. Springer, Singapore. 2020. doi:10.1007/978-981-15-5212-0_1

99. Phadatare H., Pratiher B. Dynamic stability and bifurcation phenomena of an axially loaded flexible shaft-disk system supported by flexible bearing. *Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Science*, 2020, 234(15), 2951–2967.

100. Xiang L., Jia Y., Hu A. Bifurcation and chaos analysis for multi-freedom gear-bearing system with time-varying stiffness. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(23–24), 10506–10520. ISSN 0307-904X. doi:10.1016/j.apm.2016.07.016.

101. Яворский И.Н. Применение схемы Бюй-Балло при статистическом анализе ритмических сигналов. *Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника*, 1984, 27(11), 31–37.

102. Яворский И. О статистическом анализе периодически коррелированных случайных процессов. *Радиотехника и электроника*, 1985, 6. 1096–1104.

103. Михайлишин В.Ю., Яворский И.Н. Компонентное оценивание периода стохастической повторяемости ритмических сигналов. *Автоматика*, 1993, 4, 44–48.

104. Javorskyj I., Mykhajlyshyn V. Probabilistic models and investigation of hidden periodicities. *Appl. Math. Letters*, 1996, 9(2), 21–23.

105. Михайлишин В.Ю., Яворский И.Н. Статический анализ радиофизических процессов со скрытой периодичностью. *Радиофизика и радиоастрономия*, 1996, 2, 243–254.

106. Yavorskyj I., Dehay D., Kravets I. Component statistical analysis of second order hidden periodicities. *Digital Signal Processing*, 2014, 26, 50–70.

107. Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Zakrzewski Z., Majewski J. Coherent covariance analysis of periodically correlated random processes for unknown non-stationarity period. *Digital Signal Processing*, 2017, 65, 27–51.

108. Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Zakrzewski Z., Majewski J. Statistical analysis of periodically non-stationary oscillations for unknown period, in *Proceedings of the 24th International Conference "Mixed Design of Integrated Circuits and Systems"* (2017 MIXDES'17), 2017, pp.543–546.

109. Isayev I., Iavorskyj I. Coherent and Component Statistical Analysis of Stochastic Oscillation. *Proc. Int. Conf. on Mathematical Statistics (STAT'2000)*. Wroclaw, 2000. P. 64–65.

110. Isayev I., Iavorskyj I., Yuzefovych R. Comparison of the coherent and component methods for estimating the characteristics of the periodically correlated random process. *Proceedings of 15th European Signal Processing Conference EUSIPCO 2007*. Poznan, Poland, 2007. P. 1862–1866.

111. Javorskyj I., Isayev I., Zakrzewski Z., Brooks S.P. Coherent covariance analysis of periodically correlated random processes. *Signal Processing*, 2007, 87, 13–32.

112. Javorskyj I., Isayev I., Majewski J., Yuzefovych R. Component covariance analysis for periodically correlated random processes. *Signal Processing*, 2010, 90, 1083–1102.

113. Javorskyj I., Yuzefovych R., Kravets I., Zakrzewski Z. Least squares method in the statistic analysis of periodically correlated random processes. *Radioelectron. Commun. Syst.*, 2011, 45, 45–59.

114. Javorskyj I., Leskow J., Kravets I., Isayev I., Gajecka E. Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes. Part I: Coherent and component methods and their generalization. *Signal Process.*, 2012, 92, 1559–1566.

115. Javorskyj I., Leskow J., Kravets I., Isayev I., Gajecka E. Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes. Part II: Harmonic series representation. *Signal Process.*, 2011, 91, 2506–2519.

116. Серебрянников М.Г., Первозванский Л.А. Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука, 1965. 244 с.

117. Koopmans L.H. *The Spectral Analysis of Time Series*. New York: Academic Press, 1974. 366 p.
118. Buys Ballot. *Les Changements Periodiaues de Temperature*, Utrecht: Kemink et Fils, 1847. 123 p.
119. Shuster A. On lunar and solar periodicities of earthquakes. *A Proceedings of the Royal Society of London*, 1897, 61, 455–465.
120. Shuster A. On the investigation of hidden periodicities with application to supposed 26 day period of meteorological phenomena. *Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity*, 1898, 3, 13–41.
121. Shuster A. On the periodicities of sunspots. *Transactions of the Royal Society of London*, 1906, Series A, 206, 69–100.
122. Slutsky Ye. The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes. *Econometrica*, 1937, 5, 105–146.
123. Wiener N. Generalized harmonic analysis. *Acta Mathematica*, 1930, 55, 117–258.
124. Wiener N. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*. New York: Technology Press and Wiley, 1949.
125. Khinchine A. Korrelations Theorie der stationare stochastischen Processes. *Math. Ann.*, 1934, 109, 604–615.
126. Blackman R.B., Tukey J.W. The measurements of power spectra from the point of view of communications engineering. *Bell Labs Techn. J.*, 1958, 33, 185–282.
127. Yaglom A.M. *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions*. New York: Spronger-VerLag, 1987, 526 p.
128. Kay S.M. *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*. New Yersey: Prentice Hall Englewood Cliffs, 1988. 543 p.
129. MacDonald G.J. Spectral analysis of time series generated by non linear processes. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 1989, 27, 449–469.
130. Walker A.M. On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary independent residuals. *Biometrika*, 1971, 58(1), P. 21–36.

131. Siegel A.F. Testing for periodicity in a time series. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1980, 75, 345–348.
132. Hinich M.J. Detecting a hidden periodic signal when its period is unknown. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1982, ASSP–30, 5, 747–750.
133. Newton H.J., Pagano M.A. method for determining periods in time series. *Journal of American Statistical Association*, 1983, 78, 152–157.
134. Gammaitoni L., Menichella-Saetta E., Santucci S., Marchesoni F. Extraction of periodic signals from a noise background. *Physics Letters A*, 1989, 142, 59–62.
135. Chiu Shean-Tsong. Detecting periodic components in a white Gaussian time series. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B. Methodological*, 1989, 51(2), 249–259.
136. Marple S.L. *Digital Spectral Analysis*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.
137. Fisher R.A. Tests of Significance in Harmonic Analysis, *Proceedings of the Royal Society of London Ser. A*, 1929, 125, 54–59.
138. Hinich M. A statistical theory of signal coherence. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2000, 25(2), 256–261.
139. Gardner W., Napolitano A., Paural L. Cyclostationarity: Half century of research. *Signal Processing*, 2006, 86, P. 639–697.
140. Рожков В.А. Методы вероятностного анализа океанологических процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1974, 280 с.
141. Antoni J. Cyclostationarity by examples. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2009, 23, 987–1036.
142. Михайлишин В.Ю., Флигель Д.С., Яворский И.Н. Вероятностная модель периодичности сигналов геомагнитных пульсаций РС1. Исследование структуры и волновых свойств приземной плазмы. М.: Наука, 1990, С. 76–88.

143. Михайлишин В. Ю., Яворский И. Н. Вероятностная структура сезонной изменчивости температуры воздуха. *Метеорология и гидрология*, 1994, 2, 20–35.

144. Михайлишин В.Ю., Яворський І.М., Василина Ю.Т., Драбич О.П., Ісаєв І.Ю. Імовірнісні моделі та статистичні методи аналізу сигналів вібрацій для діагностики машин та конструкцій. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*, 1997, 5, 61–74.

145. Javorskyj I., Kravets I., Matsko I., Yuzefovych R. Periodically correlated random processes: Application in early diagnostics of mechanical systems. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2017, 83, 406–438.

146. Methods of periodically correlated random processes and their generalizations. Cyclostationarity: Theory and Methods. Lecture Notes in Mechanical Engineering / I. Javorskyj, R. Yuzefovych, I. Kravets, I. Matsko. Ed. by F. Chaari, J. Leskow, A. Sanches-Ramirez, New York: Springer, 2014, P. 73–93.

147. The stochastic recurrence structure of geophysical phenomena. Cyclostationarity: Theory and Methods / I. Javorskyj, R. Yuzefovych, I. Kravets, I. Matsko. II. Ed. by F. Chaari, J. Leskow, A. Napolitano, R. Zimroz, A. Wylomanska, A. Dudek, New York: Springer, 2015, P. 55–88.

148. Яворский И. Оценка периода периодически коррелированных случайных процессов. *Отбор и передача информации*, 1986, № 73, 12–21.

149. Hurd H., Gerr N. Graphical methods for determining the presence of periodic correlation. *Journal of Time Series Analysis*, 1991, 12, 337–350.

150. Dandowate A., Giannakis G. Statistical tests for presence of periodic correlation. *IEEE Trans. Signal Process.*, 1994, 42, 2355–2369.

151. Yeung G., Gardner W. Search-efficient methods of detection of cyclostationary signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 44(5), 1214–1223.

152. Giannakis G., Zhou G. Harmonics in multiplicative and additive noise: Parameter estimation using cyclic statistics. *IEEE Trans. Signal Process*, 1995, 43, 2217–2221.

153. Napolitano A. Cyclostationarity: new trends and application. *Signal Processing*, 2016.

154. Ciblat P., Loubaton P., Serpedin E., Giannakis G.B. Performance analysis of blind carrier frequency offset estimators for noncircular transmissions through frequency-selective channels. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2002, 50(1), 130–140.

155. Ciblat P., Loubaton P., Serpedin E., Giannakis G. Asymptotic analysis of blind cyclic correlation-based symbol-rate estimators. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2002, 48(7), 1922–1934.

156. Dehay D., Hurd H. Empirical determination of the frequencies of an almost periodic time series. *J. Time Ser. Anal.*, 2013, 34(2), 262–279.

157. Stoica P., Nehora A. Statistical analysis of two non-linear least square estimators of sine-wave parameters in the coloured-noise case. *Circuit Syst. Signal Process.*, 1989, 37, 378–392.

158. Stoica P., Jakobson A., Li J. Cisoid parameter estimation in the colored noise case: asymptotic Cramer-Rao bound, maximum likelihood, and non-linear least-squares. *IEEE Trans. Signal Process.*, 1997, 45, 2048–2059.

159. Драган Я. О периодически коррелированных случайных процессах и системах с периодически изменяющимися параметрами. *Отбор и передача информации*, 1969, 22, 22–33.

160. Oruga H. Spectral representation of periodic nonstationarity random processes. *IEEE Transaction Information Theory*, 1971, IT-17, 143–149.

161. Драган Я.П. О представлении периодически коррелированного случайного процесса через стационарные компоненты. *Отбор и передача информации*, 1975, 45, 7–20.

162. Hurd H. Representation of strongly harmonizable periodically correlated random processes and their covariances. *J. Multivariate Anal.*, 1989, 29, P. 53–67.

163. Javorskyj I.N., Yuzefovych R.M., Kravets I.B., Matsko I.Y. Properties of characteristics estimators of periodically correlated random processes in preliminary determination of the period of correlation. *Radioelectron. Commun. Syst.*, 2012, 55, 335–348.

164. Napolitano A. Cyclostationary processes and time series: Theory, applications, and generalizations. Elsevier, Academic Press, 2020.

165. Shevgunov T., Guschina O., Kuznetsov Yu. Cyclostationary approach to the analysis of the power in electric circuits under periodic excitations. *Appl. Sci.*, 2021, 11, 9711. <https://doi.org/10.3390/app11209711>.

166. Javorskyj I, Yuzefovych R, Matsko I, Kurapov P. Hilbert transform of a periodically non-stationary random signal: Low-frequency modulation. *Digit Signal Process.*, 2021, 116, 103113. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103113>

167. McFadden P., Smith J. Vibration monitoring of rolling element bearings by the high frequency resonance technique -A review. *Tribol Int*, 1984, 17, 3–10.

168. Ho D., Randall RB. Optimization of bearing diagnostic techniques using simulated and actual bearing fault signals. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2000, 14, 763–788. <https://doi.org/10.1006/mssp.2000.1304>

169. Antoni J. Cyclic spectral analysis of rolling-element bearing signals: Facts and Fictions. *J. Sound Vib.*, 2007, 304, 497–529.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.02.029>

170. Randall RB, Antoni J. Rolling element bearing diagnostics—A tutorial. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2011, 25, 485–520.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ymsp.2010.07.017>.

171. Mykhailyshyn V., Javorskyj I., Vasylyna Y., Drabych O., Isaev I. Probabilistic models and statistical methods for the analysis of vibration signals in the problems of diagnostics of machines and structures. *Mater. Sci.*, 1997, 33, 655–672.
<http://dx.doi.org/10.1007/BF02537594>.

172. McCormick A., Nandi A. Cyclostationarity in rotating machine vibrations. *Mech. Syst. Signal Process.*, 1998, 12, 225–242.
<https://doi.org/10.1006/mssp.1997.0148>

173. Capdessus C., Sidahmed M., Lacoume J. Cyclostationary processes: Application in gear fault early diagnostics. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2000, 14, 371–385. <https://doi.org/10.1006/mssp.1999.1260>

174. Antoniadis I, Glossiotis G. Cyclostationary analysis of rolling-element bearing vibration signals. *J. Sound Vib.*, 2001, 248, 829–845.

<https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3815>.

175. Antoni J., Bonnardot F., Raad A., El Badaoui M. Cyclostationary modeling of rotating machine vibration signals. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2004, 18, 1285–1314. [https://doi.org/10.1016/S0888-3270\(03\)00088-8](https://doi.org/10.1016/S0888-3270(03)00088-8)

176. Antoni J., Randall R. A stochastic model for simulation and diagnostics of rolling element bearings with localized faults. *ASME J Vib Acoust*, 2003, 125, 282–289. <https://doi.org/10.1115/1.1569940>.

177. Wang H. Early detection of gear tooth cracking using the resonance demodulation technique. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2001, 15, 887–903. <https://doi.org/10.1006/MSSP.2001.1416>.

178. Borghesani P, Pennacchi P, Ricci R, Chatterton S. Testing second order cyclostationarity in the squared envelope spectrum of non-white vibration signals. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2013, 40, 38–55.

<https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2013.05.012>

179. Obuchowski J, Wyłomańska A, Zimroz R. Selection of informative frequency band in local damage detection in rotating machinery. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2014, 48, 138–152. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2014.03.011>

180. Antoni J. The spectral kurtosis: A useful tool for characterising non-stationary signals. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2006, 20, 282–307.

<https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2004.09.001>.

181. Antoni J, Randall R.B. Spectral kurtosis: Application to the vibratory surveillance and diagnostics of rotary machines. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2006, 20, 308–331. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2004.09.001>.

182. Wang D., Tse P.W., Tsui K.L. An enhanced Kurtogram method for fault diagnosis of rolling element bearings. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2013, 35, 176–199. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2012.10.003>.

183. Barszcz T, Jabłoński A. A novel method for the optimal band selection for vibration signal demodulation and comparison with the Kurtogram. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2011, 25, 431–451. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.05.018>.
184. Abboud D, Elbadaoui M, Smith WA, Randall RB. Advanced bearing diagnostics: A comparative study of two powerful approaches. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2019, 114, 604–627. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.05.011>.
185. Borghesani P. The envelope based cyclic periodogram. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2015, 58–59, 245–270. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2014.11.009>
186. Abboud D., Antoni J., Sieg-Zieba S., Eltabach M. Envelope analysis of rotating machine vibrations in variable speed conditions: A comprehensive treatment. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2017, 84, 200–226.
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.06.033>.
187. Wang D., Zhao X., Kou L.-L., Qin Y., Zhao Y., Tsui K-L. A simple and fast guideline for generating enhanced/squared envelope spectra from spectral coherence for bearing fault diagnosis. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2019, 122, 754–768. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.12.055>.
188. Peeters C, Antoni J, Helsen J. Blind filters based on envelope spectrum sparsity indicators for bearing and gear vibration-based condition monitoring. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2020, 138, 106556.
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106556>.
189. Sawalhi N., Randall R., Endo H. The enhancement of fault detection and diagnosis in rolling element bearings using minimum entropy deconvolution combined with spectral kurtosis. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2007, 21, 2616–2633.
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2006.12.002>
190. Randall R., Sawalhi N., Coats M. A comparison of methods for separation of deterministic and random signals. *Int J Cond. Monitoring*, 2011, 1, 11–19. <https://doi.org/10.1784/204764211798089048>.
191. Borghesani P., Pennacchi P., Randall R., Sawalhi N., Ricci R. Application of cepstrum pre- whitening for the diagnosis of bearing faults under variable speed conditions. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2013, 36, 370–384.

<https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2012.11.001>.

192. Randall RB, Antoni J, Chobsaard S. The relation between spectral correlation and envelope analysis. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2001, 15, 945–962. <https://doi.org/10.1006/mssp.2001.1415>.

193. Javorskyj I, Yuzefovych R, Lychak O, Sliepko R, Semenov P. Hilbert transform for analysis of amplitude modulated wide-band random signals. *Proceedings of XII International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, Spišská Kapitula, Slovakia, 26–28 September 2022; 68–71. <https://doi.org/10.1109/ACIT54803.2022.9913131>

194. Javorskyj I, Yuzefovych R, Lychak O, Sliepko R, Varyvoda M. Hilbert transform of periodically non-stationary random signals: narrow-band high frequency amplitude modulation. *Proceedings of 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology*, Kharkiv, Ukraine, 3–7 October 2022; 273–77. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916452>

195. Javorskyj I, Yuzefovych R, Kurapov P. Covariance characteristics of narrowband periodically non-stationary random signals. *Math. Model Comput.*, 2019, 6, 276–288. <https://doi.org/10.23939/mmc2019.02.276>

196. Bendat JS, Piersol AG. Random data: Analysis and measurement procedures. John Wiley & Sons, Ltd.; 2010.

197. Javorskyj I, Yuzefovych R, Matsko I, Zakrzewski Z. The least square estimation of the basic frequency for periodically non-stationary random signals. *Digit. Signal Process.*, 2022, 122, 103333. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103333>.

198. Javorskyj I, Matsko I, Yuzefovych R, Lychak O, Lys R. Methods of hidden periodicity discovering for gearbox fault detection. *Sensors*, 2021, 21, 6138. <https://doi.org/10.3390/s21186138>.

199. Javorskyj I, Matsko I, Yuzefovych R, Zakrzewski Z. Discrete estimators of characteristics for periodically correlated time series. *Digit Signal Process*, 2016, 53, 25–40. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2016.03.003>

200. Konstantin-Hansen H. Envelope analysis for diagnostics of local faults in rolling element bearings. Denmark: Bruel & Kjaer Application Note, BD0501; 2003.

201. Tyagi S., Panigrahi S. An improved envelope detection method using particle swarm optimisation for rolling element bearing fault diagnosis. *J. Comput. Des. Eng.*, 2017, 4, 305–317. <https://doi.org/10.1016/j.jcde.2017.05.002>

202. Mauricio A., Smith W., Randall R., Antoni J. Improved envelope spectrum via feature optimisation-gram (IESFOgram): A novel tool for rolling element bearing diagnostics under non-stationary operating conditions. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2020, 144, 106891.

203. Borghesani P, Pennacchi P, Chatterton S. The relationship between kurtosis- and envelope- based indexes for the diagnostic of rolling element bearings. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2014, 43(1–2), 25–43.

<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.10.007>

204. Borghesani P, Antoni J. CS2 analysis in presence of non-Gaussian background noise – Effect on traditional estimators and resilience of log-envelope indicators. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2017; 90, 378–398.

<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.12.033>

205. Antoni J, Borghesani P. A statistical methodology for the design of condition indicators. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2019; 114, 290–327.

<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.05.012>

206. Javorskyj I. The statistical analysis of periodically random processes. *Radiotech. Electron.*, 1995, 30(6), 1096–104.

207. Matsko I, Javorskyj I, Yuzefovych R, Zakrzewski Z. Forced oscillations of cracked beam under the stochastic cyclic loading. *Mech Syst Signal Process*, 2018; 104, 242–263. [10.1016/j.ymssp.2017.08.021](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.08.021)

208. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Matsko I. Hilbert transform for covariance analysis of periodically nonstationary random signals with high-frequency modulation. *ISA Transactions*, 2024, 144, 452–481.

<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2023.10.025>

209. Яворський І.М., Юзефович Р.М., Личак О.В. Перетворення Гільберта багатокomпонентних періодично нестационарних випадкових сигналів. *Доповіди Національної академії наук України*, 2022, 1, 20–33.

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.01.020>

210. Яворський І.М., Юзефович Р.М., Личак О.В. Аналіз високочастотної модуляції несучих гармонік періодично нестационарного випадкового сигналу. *Доповіді Національної академії наук України*, 2022, 2, 21–31.

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.02.021>

211. Яворський І.М., Юзефович Р.М., Личак О.В. Стохастичні моделі прихованих періодичностей та ефективні методи їх виявлення. *Доповіді Національної академії наук України*, 2023, 6, 19–32.

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.06.019>

212. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Matsko I., Semenov P. Evaluation of the mechanism damage using model of vibration signal as a periodically correlated random process. *Procedia Structural Integrity*, 2022, 36, 122–129.

<https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.01.013>

213. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Slyepko R., Semenov P. Detection of distributed and localized faults in rotating machines using periodically non-stationary covariance analysis of vibrations.. *Measurement Science and Technology*, 2023, 34, 065102. <https://doi.org/10.1088/1361-6501/acbc93>

214. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P. Methods and means of early vibration diagnostics of rotating components of mechanisms of quay container handlers. *The Paton Welding Journal*, 2022, 01, 48–58.

<https://doi.org/10.37434/tpwj2022.01.09>

215. Diagnostics of gear pair damage using the methods of biperiodically correlated random processes. Part 2. Investigation of vibration signals of the wind power generator gearbox /R.M. Yuzefovych, I.M. Javorskyj, O.V. Lychak, G.R. Trokhym, M.Z. Varyvoda, P.O. Semenov. *The Paton Welding Journal*, 2023, 4, 45–53.

<https://patonpublishinghouse.com/eng/journals/tpwj/2023/04/06/>.

216. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P. Varyvoda M. Z. Vibration Analysis of the Damaged Bearing Unit of the Port Crane Lifting Mechanism. *Materials Science*, 2023, 59(4), 395–404.

217. Діагностика пошкоджень зубчатих пар методами біперіодично корельованих випадкових процесів. Частина 1. Теоретичні аспекти проблеми. / І.М. Яворський, Р. М. Юзефович, О.В. Личак, Р.Т. Слєпко, М.З. Варивода, П.О. Семенов. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2022, № 4, 4–11.

218. Діагностика пошкоджень зубчатих пар методами біперіодично корельованих випадкових процесів. Частина 2. Дослідження вібраційних сигналів редуктора вітрогенератора / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, О.В. Личак, Г.Р. Трохим, М.З. Варивода, П.О. Семенов. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2023, 1, 13–21.

<https://patonpublishinghouse.com/eng/journals/tdnk/2023/01/02>

219. Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, В.В. Гнатишин, М.З. Варивода. Виділення та аналіз детермінованої складової вібрацій методом найменших квадратів. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2023, 2, 17–21. <https://patonpublishinghouse.com/eng/journals/tdnk/2023/02/02>

220. Дослідження кореляційної структури вібраційного сигналу підшипникових вузлів декантера / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, О.В. Личак, Б. Р. Комарницький, Р. І. Хміль, О. Я. Смірнова. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2024, 2, 3–10.

221. Пристрої для виявлення дефектів на ранніх стадіях їх зародження при визначенні технічного стану механізмів / Р. М. Юзефович, І.М. Яворський, І. Й. Мацько, О.В. Личак, Г.Р. Трохим, О. Ю. Дзерин, І. Г. Стецько. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2020, 4, 8–16.

(doi.org/10.37434/tdnk2020.04.02)

222. Методи та засоби ранньої вібродіагностики підшипникових вузлів обертових механізмів / І.М. Яворський, Р. М. Юзефович, О.В. Личак, М.З. Варивода, І. Г. Стецько. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2021, 2, 30–37. (10.37434/tdnk2021.02.04)

223. Методи та засоби ранньої вібродіагностики обертових вузлів механізмів причальних контейнерних перевантажувачів / І.М. Яворський,

Р.М. Юзефович, О.В. Личак, П.О. Семенов. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2021, 4, 25–34.

224. Javorskyj I. M., Yuzefovych R. M., Lychak O., Trokhym G., Varyvoda M. Stochastic model of the gearbox pair vibration. *Information extraction and processing*, 2021, 49(125), 26–31. (DOI: 10.15407/vidbir2021.49.026)

225. Демодуляція нестационарного випадкового сигналу з використанням перетворення Гільберта / І.М. Яворський, Р. М. Юзефович, О.В. Личак, Р.Т. Слєпко, М.З. Варивода. *Відбір і обробка інформації*, 2022, 50(126), 26–33.

226. Яворський І.М., Юзефович Р.М., Личак О.В., Комарницький Б.Р. Переваги моделі періодичного нестационарного випадкового процесу при обробці вібраційного сигналу. *Відбір і обробка інформації*, 2023, 51(127), 23–31. <https://doi.org/10.15407/vidbir2023.51.023>

227. Javorskyj I., Yuzefovych R., Kurapov P., Lychak O. The Quadrature Components of Narrowband Periodically Non-stationary Random Signals. In: Shakhovska N., Medykovsky M.O. (eds) *Advances in Intelligent Systems and Computing V. CSIT-2020. Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 1293. Springer, Cham. 2021.

(https://doi.org/10.1007/978-3-030-63270-0_48)

228. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Kurapov P. Hilbert Transform for Analysis of Daily Changes of the Earth Magnetic Field. *2021 IEEE XII International Conference on Electronics and Information Technologies (ELIT)*. P. 181–185. (10.1109/ELIT53502.2021.9501150)

229. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P. Hilbert Transform of Multicomponent Narrow-band Periodically Non-stationary Random Signal. *Proceedings of XI International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, Deggendorf, Germany, ACIT-2021.

(10.1109/ACIT52158.2021.9548456)

230. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Trokhym G., Semenov P. Bi-periodically correlated random processes as a model for gear pair vibration. *First International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied*

Problems (ITTAP–2021), November 16–18, 2021, Ternopil, Ukraine. CEUR Workshop Proceeding, 2021, 3039, P. 47–54.

231. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Sliepko R., Semenov P. Hilbert transform for analysis of amplitude modulated wide-band random signals. *Proceedings of XII International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, Spišská Kapitula, Slovakia, 26–28 September 2022. P. 68–71. Electronic ISSN: 2770–5226. Print ISSN: 2770–5218.

<https://doi.org/10.1109/ACIT54803.2022.9913131>

232. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Sliepko R., Varyvoda M. Hilbert transform of periodically non-stationary random signals: narrow-band high frequency amplitude modulation. *Proceedings of 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology*, Kharkiv, Ukraine, 3–7 October 2022. P. 273–277.

<https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916452>

233. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Sliepko R., Romanyshyn Yu. Model for analysis of high-frequency modulated random signals. *Proceedings of 13th International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, Wrocław, Poland, 21–23 September 2023. P. 96–99.

<https://ieeexplore.ieee.org/document/10275456>

DOI:10.1109/ACIT58437.2023.10275456

234. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Varyvoda M. Analysis of the periodically non-stationary structure for modulated vibration signal. *2023 IEEE 13th International Conference on Electronics and Information Technologies (ELIT)*, September 26–28, 2023. P. 252–256.

<https://doi.org/10.1109/ELIT61488.2023.10310718>

<https://ieeexplore.ieee.org/document/10310718>

235. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Semenov P. Method of periodically non-stationary random signals demodulation with Hilbert transform. *3rd International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied Problems* (ITTAP–2023), November 22–24, 2023, Ternopil, Ukraine and Opole, Poland. CEUR Workshop Proceeding, 2023. 3628, P. 548–553.

236. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Sliepko R. Demodulation of the simulated periodically non-stationary random signal with Hilbert transform. *CEUR Workshop Proceedings, 2nd International Workshop on Computer Information Technologies in Industry 4.0, CITI 2024, 12–14 June 2024, Ternopil, Ukraine, 3742*, pp. 127–136.

237. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Torba Yu., Sbrodov Ye., Komarnytskyi B. Correlation matrix for analysis of the covariance and spectral structures of PNRP. *Proceedings of 14th International Conference on Advanced Computer Information Technologies, Ceske Budejovice, Czech Republic, 19–21 September 2024*. P. 158–161. doi: 10.1109/ACIT62333.2024.10712471.

238. ГОСТ 25.506–85 Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний металлов. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при статическом нагружении.

239. ASTM E 399–90 Standard Test Method for Plain-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials.

240. Lychak O.V., Holyns'kiy I.S. Evaluation of random errors in Williams' series coefficients obtained with digital image correlation. *Measurement Science and Technology*, 2016, 27(3), 035203. DOI:10.1088/0957-0233/27/3/035203

241. Lychak O.V., Holyns'kiy I.S. Improving the accuracy of derivation of the Williams' series parameters under mixed (I+II) mode loading by compensation of measurement bias in the stress field components data. *Measurement Science and Technology*, 2016, 27(12), 125203. DOI:10.1088/0957-0233/27/12/125203

242. Дж. Гудмен. Статистическая оптика. Пер. с англ. Мир, 1988. 528 с. ISBN 5-03-001162-5

243. Schreier H., Orteu J.-J., Sutton M. Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements Basic Concepts, Theory and Applications, Springer eBook ISBN978-0-387-78747-3. Published: 21 April 2009.

doi.org/10.1007/978-0-387-78747-3

244. Sutton M., Wolters W., Peters W., Ranson W., McNeill S. Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1983, 1(3), 133–139. DOI: 10.1016/0262-8856(83)90064-1.

245. Schreier H., Braasch J., Sutton M. Systematic errors in digital image correlation caused by intensity interpolation. *Opt. Eng.*, 2000, 39(11), 2915–2921.

246. Schreier H.W., Sutton M.A. Systematic errors in digital image correlation due to undermatched subset shape functions. *Experimental Mechanics*, 2002, 42, 303–310. DOI:10.1007/BF02410987

247. Lychak O.V., Holyns'kyi I.S. Estimation of the accuracy of determination of the Williams coefficients under the conditions of normal cleavage. *Materials Science*, 2013, 48(5), 664–670.

248. Lychak O.V., Holyns'kyi I.S. Evaluation of stress field reconstruction errors near the crack tip of body under plain strain conditions. *Information extraction and processing*, 2014, 41(117), 63–69.

249. Sakharuk O.M., Muravs'kyi L.I., Holyns'kiy I.S., Lychak O.V. Determination of the field of local displacements by the digital speckle correlation method with adaptive segmentation of the images. *Materials Science*, 2014, 49(5), 660–666.

250. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.*, 1957, 24, 109–114.

251. Atluri S.N. and Kobayashi A.S. Mechanical responses of materials Handbook on Experimental Mechanics 2nd revised New York: VCN publishers 1993.

252. Личак О.В., Глова З.В., Кметь А.Б. Спектральні перетворення сигналів в різницевому спекл-інтерферометрі Ліндерця. *Відбір і обробка інформації*, 2004, 21 (97), 74–79.

253. Личак О.В., Глова З.В., Кметь А.Б. Порівняльний аналіз методів виділення корисного сигналу в фазозсувних спекл-інтерферометрах. *Відбір і обробка інформації*, 2006, 25(101), 91–98.

254. Личак О.В. Спосіб виявлення місць розміщення дефектів у матеріалі або місць руйнування матеріалу чи елемента конструкції при навантаженні (варіанти). Патент України на 20 років № 114116, опубл. 25.04.2017, бюл. № 8/2017.

255. Личак О.В. Спосіб виявлення місць розміщення дефектів у матеріалі або місць руйнування матеріалу чи елемента конструкції за механічного навантаження чи іншого виду руйнування матеріалу (варіанти). Патент України на 20 років № 121586, опубл. 25.06.2020, бюл. № 12/2020.

256. Личак О.В. Спосіб підвищення точності визначення коефіцієнтів розкладу поля механічних напружень в околі вершини тріщини у степеневі ряди Вільямса. Патент України на корисну модель № 92126, опубл. 11.08.2014, бюл. № 15/2014.

257. Личак О.В. Спосіб виявлення та визначення положення вершини наскрізної тріщини у матеріалі або конструкції. Патент України на корисну модель № 98606, опубл. 27.04.2015, бюл. № 8/2015.

258. Smith W.A., Randall R.B. Rolling element bearing diagnostics using the Case Western Reserve University data: A benchmark study. *Mech. Syst. Signal Process*, 2015, 64–65, 100–131. DOI: 10.1016/j.ymssp.2015.04.021.

ДОДАТКИ

Додаток А

“ЗАТВЕРДЖУЮ”



Директор
Фізико-механічного інституту
ім. Г. В. Карпенка НАН України
академік НАН України

З.Т. Назарчук
З. Т. Назарчук

“25” *червня* 2024 р.

АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи “Математичне моделювання нестационарних випадкових сигналів для виявлення дефектів механізмів на початкових стадіях розвитку” кандидата технічних наук, старшого дослідника, старшого наукового співробітника відділу методів та засобів відбору й обробки діагностичних сигналів Олега Васильовича Личака, представленої на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук при виконанні держбюджетних тем Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України.

Ми, що нижче підписалися, заступник директора з наукової роботи, д.т.н., проф., член-кореспондент НАН України М.С. Хома; учений секретар, к.т.н., ст.н.с. В.В. Корній; завідувач відділу методів та засобів відбору й обробки діагностичних сигналів, д.т.н., проф. Р.М. Юзефович; головний бухгалтер-начальник фінансово-економічного відділу Г.М. Гейник, цим актом підтверджуємо, що результати дисертаційного дослідження к.т.н., ст.досл., ст.н.с. відділу методів та засобів відбору й обробки діагностичних сигналів О.В. Личака використано під час виконання наукових завдань у рамках держбюджетних тем Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України, зокрема:

- держбюджетної теми НАН України “Розроблення нових інформаційних технологій спекл-кореляції і фазозсувної спекл-інтерферометрії для дослідження напружено-деформованого стану поверхонь зразків конструкційних матеріалів та динаміки їх руйнування” (2004-2006 рр., держреєстраційний номер № 0104U004176);

У рамках теми О.В. Личак розробив методи визначення постійного зсуву фази та виділення регулярної фазової модуляційної складової у інтерференційному спекл-сигналі з потужною стохастичною фазовою модуляцією.

- держбюджетної теми НАН України “Дослідження структури просторових полів переміщень і деформацій поверхонь конструкційних матеріалів методами спекл-метрології та інтерферометрії” (2007-2009, № держреєстрації 0107U004068);

У рамках теми О.В. Личак розробив методи фільтрації спекл-сигналів.

- держбюджетної теми НАН України "Розроблення методів визначення параметрів локального руйнування конструкційних матеріалів під дією статичних і циклічних навантажень на основі фазозсувної інтерферометрії і спекл-кореляції" (2010-2012, 0110U000432);
У рамках теми О.В. Личак розробив методику оцінювання похибок спекл-кореляційного методу визначення переміщень поверхні.
- держбюджетної теми НАН України "Встановлення методами спекл-метрології та інтерферометрії деформаційних характеристик матеріалів для оцінювання параметрів їх руйнування з урахуванням локальних зон пружно-пластичного стану" (2013-2015, 0113U000306);
У рамках теми О.В. Личак розробив методику оцінювання випадкових складових похибок та компенсації похибок зміщення.
- держбюджетної теми НАН України "Розроблення технологій діагностування елементів конструкцій та локального руйнування засобами оптичної спекл-метрології, фазозсувної інтерферометрії та цифрової голографії" (2016-2018, 0116U004952);
У рамках теми О.В. Личак розробив методику виявлення місць локального руйнування матеріалу за статичного та динамічного навантаження.
- держбюджетної теми НАН України "Розроблення інформаційних технологій та засобів вібраційної діагностики на основі періодично нестационарних нелінійних моделей з використанням перетворення Гільберта" (2019-2021, 0119U101061);
У рамках теми О.В. Личак розробив теоретичні основи використання перетворення Гільберта для аналізу діагностичних періодично нестационарних випадкових сигналів, що характеризуються високочастотною широкосмуговою та вузькосмуговою амплітудно-фазовою модуляцією несучих багатокomпонентного періодично нестационарного випадкового сигналу, ним було досліджено кореляційну структуру аналітичного сигналу. Ним введені моделі періодично нестационарного випадкового сигналу на основі перетворення Гільберта і аналітичного сигналу.
- держбюджетної теми НАН України "Розроблення методів кореляційного аналізу поліритмічної структури вібраційних сигналів для підвищення ефективності діагностики елементів вузлів механізмів з різними швидкостями обертання" (2022-2024, 0122U002138),
У рамках теми О.В. Личак розробив метод фільтрації ПНВС з врахуванням оцінок взаємних кореляцій компонент вищих порядків квадратур високочастотних несучих, що дозволило сформулювати вимоги до коректного вибору параметрів обробки ПНВС та провести обробку реальних діагностичних сигналів.

- договору № 2.3.1 цільової комплексної програми наукових досліджень НАН України “Надійність і довговічність матеріалів, конструкцій, обладнання та споруд” (РЕСУРС-2) “Спеціалізовані пристрої для виявлення дефектів на ранніх стадіях їх зародження при визначенні технічного стану механізмів” (2019-2020, 0119U101190).

У рамках договору О.В. Личак проаналізував процеси генерації нових стійких станів (дефектів) на основі моделей нелінійних динамічних систем зі збуренням, ним запропоновано означення ранньої стадії розвитку дефекту як періодично нестационарного випадкового процесу. Ним проаналізовані реальні вібраційні сигнали від різних типів механізмів для виявлення та встановлення типів дефектів.

Отримані при виконанні дисертаційної роботи результати в області аналізу характеристик періодично нестационарних випадкових процесів і сигналів є суттєвим внеском в теорію нестационарних випадкових процесів, розроблені методи їх кореляційного аналізу дають можливість отримати слушні незміщені оцінки параметрів цих сигналів. Введені моделі періодично нестационарного випадкового сигналу на основі перетворення Гільберта і аналітичного сигналу дають можливість кількісно характеризувати взаємозв'язки між складовими діагностичного сигналу, на основі експериментальних даних виявляти, типізувати та оцінювати стан дефектів у системах на ранніх стадіях розвитку, встановити їх походження та фізичну природу.

Заступник директора з наукової роботи,
д-р техн. наук, проф.,
член-кореспондент НАН України



М.С. Хома

Учений секретар,
канд. техн. наук, ст. наук. співроб.



В.В. Корній

Завідувач відділу методів та засобів
відбору й обробки діагностичних сигналів,
д-р техн. наук, проф.



Р.М. Юзефович

Головний бухгалтер-начальник ФЕВ



Г.М. Гейник

Додаток Б



ТзОВ «Кипер-Пласт»

Україна, 70049
м. Львів, а/с 10541
тел/факс: (032) 242-13-66
www.keeperplast.com.ua
k2421366@gmail.com

Розробка, впровадження, супровід ресурсоенергозберігаючих програм, методик і технологій

№ 38 від 05.11. 2024 р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи
Олега Васильовича Личака

Цей акт складений про те, що запропоновані у дисертаційній роботі на здобуття наукового ступеня доктора наук Олега Васильовича Личака моделі періодично нестационарних випадкових сигналів, методи їх обробки та аналізу для оцінювання ступеня розвитку дефектів в обертових механізмах використовується у відділі діагностики нашого підприємства при проведенні технічного діагностування елементів механізмів та підшипникових вузлів турбін і турбогенераторів теплових електростанцій для вироблення оптимальних рекомендацій щодо їх безпечної експлуатації та запобігання виникнення аварійних ситуацій.

Директор

О. С. Глушко

Керівник відділу діагностики

М. М. Кубай



Додаток В

ТОВАРИСТВО
З ОБМЕЖЕНОЮ ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ
ФІРМА «ДІАЛАБ» ЛТД

Україна, 65009, м. Одеса, вул. Фонтанська дорога, 9-Б
тел./факс: +38 (048) 714-38-58
e-mail: dialab@dialab.od.ua
e-mail: dialab@rtmp.odessa.ua



LIMITED
LIABILITY COMPANY
FIRM «DIALAB» LTD

Ukraine, 65009, Odesa city, Fontanska road str., 9-B
tel./fax: +38 (048) 714-38-58
e-mail: dialab@dialab.od.ua
e-mail: dialab@rtmp.odessa.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ

Генеральний директор
ТОВ Фірма «ДІАЛАБ» ЛТД

д.т.н., професор

В. М. Пустовий

«11» листопада 2024 р.



АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи О. В. Личака

Цей акт нами складений про те, що запропоновані у дисертаційній роботі О.В. Личака моделі періодично нестаціонарних випадкових сигналів, методи їх декомпозиції та аналізу для виявлення, локалізації та оцінювання ступеня розвитку дефектів в механізмах використовуються нашими фахівцями при проведенні технічного діагностування агрегатів приводів механізмів (електродвигуни, редуктори, підшипникові вузли) порталних кранів.

Запропоновані О.В. Личаком методи декомпозиції та аналізу кореляційних зв'язків квадратурних складових модулюючого сигналу та їх представлення дозволяють оптимально вибирати параметри для обробки періодично нестаціонарних випадкових сигналів вібрації, коректно оцінювати ступінь взаємозв'язку між компонентами сигналу та виявляти дефекти в механізмах на ранніх стадіях їх розвитку.

Директор
ТОВ Фірма «ДІАЛАБ» ЛТД
Технічний експерт, к.т.н.

М.В. Триколенко



70221
ДСТУ EN ISO/IEC 17020



CERTIFIED
ISO 9001



Додаток Г



Товариство з обмеженою відповідальністю
«ПОРТТЕХЕКСПЕРТ»

68600, Одеська обл., м. Ізмаїл,
 пр-т Миру, 25-Б, офіс №229
 тел. +38 (063) 604 26 63
 E-mail: porttehexpert@ukr.net

Є Д Р П О У 3 9 5 3 4 4 0 8
 Код банку 3 0 0 3 4 6
 Р/р UA633003460000260070141426011
 в А Т « С Е Н С Б А Н К »

«15» листопада 2024р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи О. В. Личака

Даний акт складений про те, що запропоновані у дисертаційній роботі О. В. Личака моделі та методи декомпозиції і кореляційного аналізу періодично нестационарних випадкових сигналів, алгоритми представлення кореляційних взаємозв'язків в структурі діагностичного сигналу та оцінювання його ступеня нестационарності використовуються фахівцями ТОВ «ПОРТТЕХЕКСПЕРТ» для виявлення та оцінювання ступеня розвитку дефектів в підшипникових вузлах електродвигунів механізмів причальних контейнерних перевантажувачів.

Результати, отримані в роботі О. В. Личака також використані при обробці та аналізі вібраційних сигналів в відділі технічної діагностики під час періодичної та комплексної діагностики при оцінюванні технічного стану підшипникових вузлів да зубчастих передач приводів магістральних конвеєрів спеціалізованих комплексів з перевантаження вугілля на ДП «МТП «ПІВДЕННИЙ» та ТОВ «ТІС-ВУГІЛЛЯ».

Директор

ТОВ «ПОРТТЕХЕКСПЕРТ»

технічний експерт, к.т.н.



Павло СЕМЕНОВ

Додаток Д

ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ
«ДП ВОРЛД ТІС ПІВДЕННИЙ»



«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор з операційної роботи
ТОВ «ДП ВОРЛД ТІС ПІВДЕННИЙ»



Андрій БАСЮК

Містогада 2024р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи О.В. Личака

Цей акт складено про те, що запропоновані у дисертаційній роботі О.В. Личака моделі періодично нестаціонарних випадкових сигналів, методи їх кореляційного статистичного аналізу, декомпозиції та отримання слушних оцінок нестаціонарності сигналу для виявлення дефектів в механізмах на ранніх стадіях їх розвитку використовується нашими фахівцями при аналізі вібраційних діагностичних сигналів в процесі технічного діагностування механізмів портових кранів перевантажувального комплексу ТОВ «ДП ВОРЛД ТІС ПІВДЕННИЙ».

Запропоновані О.В. Личаком методи декомпозиції та аналізу кореляційних взаємозв'язків складових стохастичного модулюючого сигналу їх представлення та оцінки ступеня нестаціонарності дозволяють виявляти дефекти в механізмах та оцінювати їх ступінь розвитку, що забезпечує надійність експлуатації та планування робіт з ремонту і технічного обслуговування парку портових кранів перевантажувального комплексу ТОВ «ДП ВОРЛД ТІС ПІВДЕННИЙ».

Начальник служби механізації
ТОВ «ДП ВОРЛД ТІС ПІВДЕННИЙ»

Сергій МАМОНТОВ

Україна, 67543, Одеська обл.
Одеський р-н, с.Визирка,
вул. Ставнищера Олексія, 60
e-mail: office.dpworldtispivdennyi@dpworld.com

Код ЄДРПОУ 37468475
ІПН 374684715177
АТ «Райффайзен Банк»
IBAN UA59 3003 3500 0000 0260 0122 0060 2
АТ «Креді Агріколь»
IBAN UA49 3006 1400 0002 6003 5004 3115 2

Додаток Е

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ТА ВІДОМОСТІ ПРО
АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у журналах, що входять до наукометричних баз даних Scopus/Web of Science:

1. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Matsko I. Hilbert transform for covariance analysis of periodically nonstationary random signals with high-frequency modulation. *ISA Transactions*, 144, 452–481, 2024.

<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2023.10.025> (SJR Q1, Scopus)

2. Javorskyj I., Matsko I., Yuzefovych R., Lychak O., Lys R. Methods of Hidden Periodicity Discovering for Gearbox Fault Detection. *Sensors*, 2021, 21, 6138.

<https://doi.org/10.3390/s21186138> (SJR Q1, Scopus)

3. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Trokhym G., Varyvoda M. Methods of periodically non-stationary random processes for vibrations monitoring of rolling bearing with damaged outer race. *Digital Signal Processing: A Review Journal*, 145, 2024, 104343. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2023.104343> (SJR Q2, Scopus)

4. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Slyepko R., Semenov P. Detection of distributed and localized faults in rotating machines using periodically non-stationary covariance analysis of vibrations. *Measurement Science and Technology*, 2023, 34, 065102. <https://doi.org/10.1088/1361-6501/acbc93> (SJR Q2, Scopus)

5. Lychak O., Holyns'kiy I. Evaluation of random errors in Williams' series coefficients obtained with digital image correlation. *Measurement Science and Technology*, 2016, 27(3), 035203.

<https://doi.org/10.1088/0957-0233/27/3/035203> (SJR Q2, Scopus)

6. Lychak O., Holyns'kiy I. Improving the accuracy of derivation of the Williams' series parameters under mixed (I+II) mode loading by compensation of measurement bias in the stress field components data. *Measurement Science and Technology*, 2016, 27(12), 125203.

<https://doi.org/10.1088/0957-0233/27/12/125203> (SJR Q2, Scopus)

7. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Varyvoda M. Vibration analysis of the damaged bearing unit of the port crane lifting mechanism. *Materials Science*, 2024, 59(4), 395 – 404.

<https://doi.org/10.1007/s11003-024-00790-x> (SJR Q3, Scopus)

8. Sakharuk O., Muravs'kyi L., Holyns'kiy I., Lychak O. Determination of the field of local displacements by the digital speckle correlation method with adaptive segmentation of the images. *Materials Science*, 2014, 49(5), 660–666.

<https://doi.org/10.1007/s11003-014-9660-4> (SJR Q3, Scopus)

9. Lychak O., Holyns'kyi I. Estimation of the accuracy of determination of the Williams coefficients under the conditions of normal cleavage. *Materials Science*, 2013, 48(5), 664–670. <https://doi.org/10.1007/s11003-013-9552-z> (SJR Q3, Scopus)

10. Voronyak T., Kmet A., Lychak O. Single-step phase-shifting speckle interferometry. *Materials Science*, 2007, 43(4), 554–567.

<https://doi.org/10.1007/s11003-013-9552-z> (SJR Q3, Scopus)

Статті у наукових фахових виданнях України:

11. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P. Methods and means of early vibration diagnostics of rotating components of mechanisms of quay container handlers. *The Paton Welding Journal*, 2022, 01, 48–58.

<https://doi.org/10.37434/tpwj2022.01.09>

12. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Trokhym G., Varyvoda M., Semenov P. Diagnostics of gear pair damage using the methods of biperiodically correlated random processes. Part 2. Investigation of vibration signals of the wind power generator gearbox. *The Paton Welding Journal*, 2023, 4, 45–53.

<https://doi.org/10.37434/tpwj2023.04.06>

13. Lychak O., Holyns'kyi I. Evaluation of stress field reconstruction errors near the crack tip of body under plain strain conditions. *Information extraction and processing*, 2014, 41(117), 63–69.

14. Яворський І., Юзефович Р., Личак О. Перетворення Гільберта багатокомпонентних періодично нестационарних випадкових сигналів. *Доповіді Національної академії наук України*, 2022, 1, 20–33.

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.01.020>

15. Яворський І., Юзефович Р., Личак О. Аналіз високочастотної модуляції несучих гармонік періодично нестационарного випадкового сигналу. *Доповіді Національної академії наук України*, 2022, 2, 21–31.

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.02.021>

16. Яворський І., Юзефович Р., Личак О. Стохастичні моделі прихованих періодичностей та ефективні методи їх виявлення. *Доповіді Національної академії наук України*, 2023, 6, 19–32.

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.06.019>

17. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Слепко Р., Варивода М., Семенов П. Діагностика пошкоджень зубчатих пар методами біперіодично корельованих випадкових процесів. Частина 1. Теоретичні аспекти проблеми. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2022, 4, 4–11.

<https://doi.org/10.37434/tdnk2022.04.01>

18. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Трохим Г., Варивода М., Семенов П. Діагностика пошкоджень зубчатих пар методами біперіодично корельованих випадкових процесів. Частина 2. Дослідження вібраційних сигналів редуктора вітрогенератора. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2023, 1, 13–21. <https://doi.org/10.37434/tdnk2023.01.02>

19. Юзефович Р., Яворський Р., Личак О., Гнатишин В., Варивода М. Виділення та аналіз детермінованої складової вібрацій методом найменших квадратів. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2023, 2, 17–21.

<https://doi.org/10.37434/tdnk2023.02.02>

20. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Комарницький Б., Хміль Р., Смірнова О. Дослідження кореляційної структури вібраційного сигналу підшипникових вузлів декантера. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2024, 2, 3–10. <https://doi.org/10.37434/tdnk2024.02.01>

21. Юзефович Р., Яворський І., Мацько І., Личак О., Трохим Г., Дзерин О., Стецько І. Пристрої для виявлення дефектів на ранніх стадіях їх зародження при визначенні технічного стану механізмів. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2020, 4, 8–16. <https://doi.org/10.37434/tdnk2020.04.02>

22. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Варивода М., Стецько І. Методи та засоби ранньої вібродіагностики підшипникових вузлів обертових механізмів. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2021, 2, 30–37.

<https://doi.org/10.37434/tdnk2021.02.04>

23. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Семенов П. Методи та засоби ранньої вібродіагностики обертових вузлів механізмів причальних контейнерних перевантажувачів. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2021, 4, 25–34. <https://doi.org/10.37434/tdnk2021.04.03>

24. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Trokhym G., Varyvoda M. Stochastic model of the gearbox pair vibration. *Information extraction and processing*, 2021, 49 (125), 26–31. <https://doi.org/10.15407/vidbir2021.49.026>

25. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Слєпко Р., Варивода М. Демодуляція нестационарного випадкового сигналу з використанням перетворення Гільберта. *Відбір і обробка інформації*, 2022, 50 (126), 26–33.

<https://doi.org/10.15407/vidbir2022.50.026>

26. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Комарницький Б. Переваги моделі періодичного нестационарного випадкового процесу при обробці вібраційного сигналу. *Відбір і обробка інформації*, 2023, 51(127), 23–31.

<https://doi.org/10.15407/vidbir2023.51.023>

27. Личак О., Глова З., Кметь А. Спектральні перетворення сигналів в різницевому спекл-інтерферометрі Ліндерця. *Відбір і обробка інформації*, 2004, 21 (97), 74–79.

28. Личак О., Глова З., Кметь А. Порівняльний аналіз методів виділення корисного сигналу в фазозсувних спекл-інтерферометрах. *Відбір і обробка інформації*, 2006, 25(101), 91–98.

29. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Khmil R. The covariance analysis of the periodically non-stationary random signal with narrow-band modulation of carrier harmonics. *Information Extraction and Processing*, 2024, 52(128), 19–26.

<https://doi.org/10.15407/vidbir2024.52.019>

Патенти:

30. Личак О.В. Спосіб виявлення місць розміщення дефектів у матеріалі або місць руйнування матеріалу чи елемента конструкції при навантаженні (варіанти). Патент України на 20 років № 114116, опубл. 25.04.2017, бюл. № 8/2017.

31. Личак О.В. Спосіб виявлення місць розміщення дефектів у матеріалі або місць руйнування матеріалу чи елемента конструкції за механічного навантаження чи іншого виду руйнування матеріалу (варіанти). Патент України на 20 років № 121586, опубліковано 25.06.2020, бюл. № 12/2020.

32. Личак О.В. Спосіб підвищення точності визначення коефіцієнтів розкладу поля механічних напружень в околі вершини тріщини у степеневі ряди Вільямса. Патент України на корисну модель № 92126, опубліковано 11.08.2014, бюл. № 15/2014.

33. Личак О.В. Спосіб виявлення та визначення положення вершини наскрізної тріщини у матеріалі або конструкції. Патент України на корисну модель № 98606, опубліковано 27.04.2015, бюл. № 8/2015.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

34. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Matsko I., Semenov P. Evaluation of the mechanism damage using model of vibration signal as a periodically correlated random process. *Procedia Structural Integrity*, 2022, 36, 122–129.

<https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.01.013> (Scopus)

35. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Kurapov P. Hilbert Transform for Analysis of Daily Changes of the Earth Magnetic Field // *2021 IEEE XII International Conference on Electronics and Information Technologies (ELIT)*. P. 181–185. <https://doi.org/10.1109/ELIT53502.2021.9501150> (Scopus)

36. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P. Hilbert Transform of Multicomponent Narrow-band Periodically Non-stationary Random Signal // *Proceedings of XI International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, Deggendorf, Germany, ACIT–2021. P. 57–60.

<https://doi.org/10.1109/ACIT52158.2021.9548456> (Scopus)

37. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Trokhym G., Semenov P. Bi-periodically correlated random processes as a model for gear pair vibration // *First International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied Problems (ITTAP–2021)*, November 16-18, 2021, Ternopil, Ukraine. CEUR Workshop Proceeding, 2021, 3039, P. 47–54. (Scopus)

38. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Sliepko R., Semenov P. Hilbert transform for analysis of amplitude modulated wide-band random signals // *Proceedings of XII International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, Spišská Kapitula, Slovakia, 26-28 September 2022. P. 68–71. Electronic ISSN: 2770-5226. Print ISSN: 2770-5218.

<https://doi.org/10.1109/ACIT54803.2022.9913131> (Scopus)

39. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Sliepko R., Varyvoda M. Hilbert transform of periodically non-stationary random signals: narrow-band high frequency amplitude modulation // *Proceedings of 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology*, Kharkiv, Ukraine, 3–7 October 2022. P. 273–277.

<https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916452> (Scopus)

40. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Sliepko R., Romanyshyn Yu. Model for analysis of high-frequency modulated random signals // *Proceedings of 13th International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, Wrocław, Poland, 21-23 September 2023. P. 96–99.

<https://doi.org/10.1109/ACIT58437.2023.10275456> (Scopus)

41. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Varyvoda M. Analysis of the periodically non-stationary structure for modulated vibration signal // *2023 IEEE 13th International Conference on Electronics and Information Technologies (ELIT)*, September 26-28, 2023. P. 252–256.

<https://doi.org/10.1109/ELIT61488.2023.10310718> (Scopus)

42. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Semenov P. Method of periodically non-stationary random signals demodulation with Hilbert transform // *3rd International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied Problems (ITTAP-2023)*, November 22-24, 2023, Ternopil, Ukraine and Opole, Poland. CEUR Workshop Proceeding, 2023. 3628, P. 548–553. (Scopus)

43. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Sliepko R. Demodulation of the simulated periodically non-stationary random signal with Hilbert transform // *CEUR Workshop Proceedings, 2nd International Workshop on Computer Information Technologies in Industry 4.0, CITI 2024*, 12–14 June 2024, Ternopil, Ukraine, 3742, P. 127–136. (Scopus)

44. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Torba Yu., Sbrodov Ye., Komarnytskyi B. Correlation matrix for analysis of the covariance and spectral structures of PNRP // *Proceedings of 14th International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, Ceske Budejovice, Czech Republic, 19-21 September 2024. P. 158–161.

<https://doi.org/10.1109/ACIT62333.2024.10712471> (Scopus)

45. Javorskyj I., Torba Yu., Yuzefovych R., Sbrodov Ye., Lychak O. Periodically non-stationary properties of vibrations for gas-turbine engine with unbalanced rotor // *VII International conference “Welding and related technologies”*, 7–10 October 2024, Yaremche, Ukraine: Abstracts of plenary and poster papers. Kyiv, International Association “Welding”. P. 17.

46. Трохим Г.Р., Юзефович Р.М., Личак О.В., Варивода М.З., Бойко М.В., Лисенко О.М. Діагностування підшипників кочення методами ПКВП. *Праці XX Міжнародної науково-технічної конференції “Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта”*. Київ : Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2019. С. 167–168.

47. Яворський І.М. Застосування кореляційного аналізу вібраційних сигналів для дослідження трибокорозії / І.М. Яворський, Р.Т. Слєпко, Р.М. Юзефович, О.В. Личак // *Праці XX Міжнародної науково-технічної конференції*

“Приладобудування: стан і перспективи”. Київ : Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2021. С. 155–156.

48. Юзефович Р.М. Розроблення систем вібраційної діагностики обертових механізмів з використанням методів теорії періодично нестационарних випадкових процесів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, І.Г. Стецько // *Збірка тез чотирнадцятої міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси”* (ПРТК-2021). Київ: Національний авіаційний університет, 2021. С. 228–229.

49. Встановлення технічного стану обладнання з використанням вібродіагностичних систем відбору та обробки вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, І.Г. Стецько, М.З. Варивода // *Праці XX Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2021. С. 146–147.

50. Система відбору вібраційних сигналів для діагностики обертових механізмів / Р.М. Юзефович, І.Г. Стецько, І.М. Яворський, О.В. Личак // *Збірка тез доповідей другої міжнародної конференції “Неруйнівний контроль та моніторинг технічного стану”*. Одеса, 2021. С. 43–44.

51. Юзефович Р.М. Підходи до побудови систем вібродіагностики / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, П.О. Семенов, О.В. Личак, І.Г. Стецько // *Збірка тез доповідей другої міжнародної конференції “Неруйнівний контроль та моніторинг технічного стану”*. Одеса, 2021. С. 44.

52. Дослідження спектральних властивостей вібраційного сигналу від елемента механізму з тріщиною / Р.М. Юзефович, І.М. Мацько, О.В. Личак, Г.Р. Трохим, І.М. Яворський // *Праці XXI Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2022. С. 191–193.

53. Юзефович Р.М. Дослідження технічного стану механізмів з використанням методів періодично корельованих випадкових процесів / Р.М. Юзефович, О.В. Личак, П.Р. Курапов, М.З. Варивода, І.М. Яворський // *Праці XXI Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2022. С. 196–198.

54. Дослідження процесів трибокорозії поверхні тіл обертання із застосуванням кореляційного аналізу вібраційних сигналів / О.В. Личак, Р.Т. Слепко, І.М. Яворський, Р.М. Юзефович // *Праці XXI Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2022. С. 200–201.

55. Сучасні методи вібраційної діагностики обертових механізмів основані на теорії періодично корельованих випадкових процесів / Р.М. Юзефович, О.В. Личак, І.М. Яворський, І.Г. Стецько // *Збірка тез п'ятнадцятої міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ІРТК-2022)*. Київ: Національний авіаційний університет, 2022. С. 202–203.

56. Обробка вібраційних сигналів методами періодичних нестационарних випадкових процесів для виявлення дефектів підшипників / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, О.В. Личак, Г.Р. Трохим, І.М. Мацько // *Збірка тез міжнародної науково-практичної конференції “Міцність і довговічність сучасних матеріалів та конструкцій”* присвячена 70-ти річчю з дня народження член-кореспондента НАН України, проф. П. Яснія. Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2022. С. 219–221.

57. Діагностування механізмів на основі аналізу вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, О.В. Личак, І.М. Яворський, І.Г. Стецько, І.Я. Стецько // *Збірка тез міжнародної науково-практичної конференції “міцність і довговічність сучасних матеріалів та конструкцій”* присвячена 70-ти річчю з дня

народження член-кореспондента НАН України, проф. П. Яснія. Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2022. С. 222–223

58. Модель стохастичної модуляції вібраційних сигналів для виявлення дефектів підшипників / Г. Трохим, О. Личак, Р. Юзефович, І. Яворський, Р. Слепко // *Збірка тез міжнародної науково-практичної конференції “міцність і довговічність сучасних матеріалів та конструкцій”* присвячена 70-ти річчю з дня народження член-кореспондента НАН України, проф. П. Яснія. Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2022. С. 224–225.

59. Застосування вібродіагностичних систем відбору та обробки вібраційних сигналів для визначення технічного стану промислового обладнання / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, Р.Т. Слепко, О.В. Личак, І.Г. Стецько, М.З. Варивода, Г.Р. Трохим // *Збірка тез конференції “Зварювання та технічна діагностика для відновлення економіки України”*. Київ: Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України, 2022. С. 22.

60. Періодично корельовані випадкові процеси як модель циклічних навантажень у механізмах та конструкціях / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, М.З. Варивода, Р.Т. Слепко // *Праці XXII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2023. С. 222–223.

61. Дослідження обертових механізмів без спеціальних фундаментів методами періодично корельованих випадкових процесів / Р. Юзефович, І. Яворський, О. Личак, В. Симоненко, Р. Слепко // *Праці XXII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2023. С. 262–263.

62. Застосування нестационарного підходу до аналізу вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, І.Й. Мацько // *Збірка*

тез шістнадцятої міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ІРТК-2023). Київ: Національний авіаційний університет, 2023. С. 302–304.

63. Застосування методів періодично корельованих випадкових процесів для аналізу вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, І.Й. Мацько, П.О. Семенов // *Матеріали 16-й міжнародного симпозиуму українських інженерів-механіків у Львові*. Львів: Національний Університет “Львівська Політехніка”, 2023. С. 124–125.

64. Аналіз вібраційних сигналів від тонкої пластини з тріщиною / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, О.В. Личак, І.Й. Мацько // *Матеріали XIII міжнародної науково-практичної конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем”*. Національний університет “Чернігівська політехніка”, 2023. Т. 1. С. 236.

65. Імовірнісна модель вібраційних сигналів у вигляді періодичного нестационарного випадкового процесу / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, Р.Т. Слєпко, П.О. Семенов // *Збірник тез доповідей III Міжнародної науково-технічної конференції “Перспективи розвитку машинобудування та транспорту”*, 1-3 червня 2023 року. Вінниця: Вінницький національний технічний університет, 2023. С. 301–302.

66. Дослідження технічного стану авіаційних двигунів методами періодично нестационарних випадкових процесів / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, Ю.І. Торба, О.В. Личак, Є.В. Сбродов // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 236–237.

67. Триканальний портативний пристрій для відбору та обробки вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, І.Г. Стецько, О.В. Личак, І.Я. Стецько, М.З. Варивода // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ:

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 238–239.

68. Метадані при відборі та дослідженні вібраційних сигналів / Г.Р. Трохим, О.В. Личак, Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, В.С. Янішевський // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 244–245.

69. Дослідження структури вібраційних сигналів методами ПКВП у підшипниках підданих наводненню / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, Б.Р. Комарницький, О.В. Личак, Р.Т. Слепко // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 253–254.

70. Дослідження поширення вібрації в транспортній колісній машині / Г.Т. Черчик, О.В. Личак, Г.Р. Трохим, Р.М. Юзефович, І.М. Яворський // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 257.

71. Побудова сучасних систем вібраційної діагностики складних механізмів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, Б.Р. Комарницький, О.В. Личак // *Збірка тез сімнадцятої Міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ІРТК–2024)*. Київ: Національний авіаційний університет, 2024. С. 436–437.

72. Діагностування дефектів у механізмах портових кранів / І.М. Яворський, П.О. Семенов, Р.М. Юзефович, О.В. Личак // *Збірка тез сімнадцятої Міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ІРТК–2024)*. Київ: Національний авіаційний університет, 2024. С. 438–439.

73. Вібраційна діагностика обертових вузлів машинних комплексів / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, Б.Р. Комарницький, О.В. Личак, І.Й. Мацько //

Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем”. Чернігів: Національний університет “Чернігівська політехніка”, 2024. С. 240.

74. Спосіб пониження вібраційного навантаження на опори конструкцій / Г.Т. Черчик, І.М. Яворський, О.В. Личак, Р.Т. Слєпко, Р.М. Юзефович // *Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем”*. Чернігів: Національний університет “Чернігівська політехніка”, 2024. С. 241.

75. Переваги вібраційних методів діагностики механізмів порталних кранів / П.О. Семенов, І.М. Яворський, О.В. Личак, Р.М. Юзефович, Б.Р. Комарницький // *Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем”*. Чернігів: Національний університет “Чернігівська політехніка”, 2024. С. 242.

76. Спеціалізовані системи для задач вібраційної діагностики обертових механізмів / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, О.В. Личак, І.Й. Мацько, Г.Р. Трохим, І.Г. Стецько // *Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції “Перспективи розвитку озброєння та військової техніки сухопутних військ”*. Львів: Національна академія сухопутних військ імені Гетьмана Петра Сагайдачного, 2024. С. 407–408.

77. Model of the diagnostic signals in the form of bi-periodically non-stationary random process /R.M. Yuzefovych, I.M. Javorskyj, O.V. Lychak, M.Z. Varyvoda // *Матеріали міжнародної наукової конференції “Математика та інформаційні технології”*, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28-30 вересня 2023 року. Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2023. С. 131–132.

Додаток Ж

Для добутку $s(t)s(t+u)$ ми маємо:

$$s(t)s(t+u) = \sum_{l,n=-L}^L c_l \bar{c}_n e^{i(l-n)\omega_0 t} e^{il\omega_0 u}.$$

Вводимо новий індекс додавання: $k = l - n$ (Рис. А1):

$$s(t)s(t+u) = \sum_{l=-L}^L \sum_{k=l+L}^{l-L} c_l \bar{c}_{l-k} e^{ik\omega_0 t} e^{il\omega_0 u}.$$

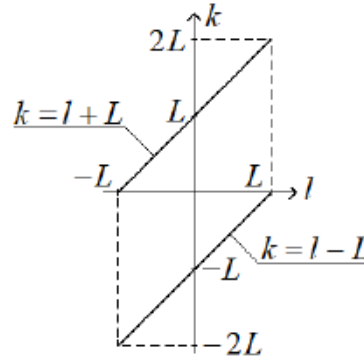


Рис. А1. Перетворене додавання

Після зміни порядку додавання отримуємо:

$$s(t)s(t+u) = \sum_{k=-2L}^0 e^{ik\omega_0 t} \sum_{l=-L}^{k+L} c_l \bar{c}_{l-k} e^{il\omega_0 u} + \sum_{k=1}^{2L} e^{ik\omega_0 t} \sum_{l=k-L}^L c_l \bar{c}_{l-k} e^{il\omega_0 u} = \sum_{k=-2L}^{2L} r_k(u) e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$r_k(u) = \sum_{l=M} c_l \bar{c}_{l-k} e^{il\omega_0 u},$$

і

$$M = \begin{cases} \{-L, \dots, k+L\}, & k \leq 0, \\ \{k-L, \dots, L\}, & k > 0. \end{cases}$$

Легко помітити, що

$$r_k(-u) = r_k(u) e^{ik\omega_0 u}.$$

Додаток И

Враховуючи співвідношення (1.21), для кореляційної функції відфільтрованого сигналу (2.22) маємо:

$$b_{\xi_f}(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}(\omega - k\omega_0) H(\omega) f_k(\omega) e^{i\omega u} d\omega.$$

Це означає, що

$$B_k^{(\xi_f)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}(\omega - k\omega_0) H(\omega) f_k(\omega) e^{i\omega u} d\omega.$$

Нульова кореляційна компонента в точці $u = 0$ дорівнює

$$B_k^{(\xi_f)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 f_0(\omega) d\omega = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} f_0(\omega) d\omega. \quad (\text{B.1})$$

Вищі кореляційні компоненти визначаються виразом (див. Рис. В1):

$$B_k^{(\xi_f)}(0) = \int_{-\omega_2}^{-\omega_1 - k\omega_0} f_k(\omega) d\omega + \int_{\omega_1 + k\omega_0}^{\omega_2} f_k(\omega) d\omega = \int_{\omega_1 + k\omega_0}^{\omega_2} [f_k(\omega) + f_k(-\omega)] d\omega.$$

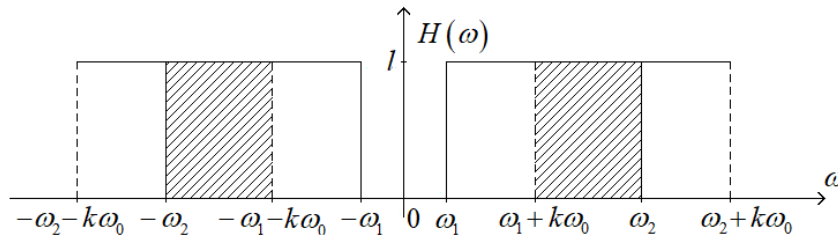


Рис. В1. Смугова фільтрація ПНВС

Оскільки $f_k(-\omega) = f_k(\omega + k\omega)$, то

$$B_k^{(\xi_f)}(0) = \int_{\omega_1 + k\omega_0}^{\omega_2} [f_k(\omega) + f_k(\omega + k\omega)] d\omega. \quad (\text{B.2})$$

Підставивши вирази (2.4) і (2.5) в (B.1) і (B.2), отримаємо:

$$B_0^{(\xi_f)}(0) = \sum_{l=-L}^L |c_l|^2 \left[\int_{\omega_1}^{\omega_2} [f_\mu(\omega - l\omega_0) + f_\mu(\omega + l\omega_0)] d\omega \right],$$

$$B_k^{(\xi_f)}(0) = \sum_{l \in M} c_l \bar{c}_{l-k} \int_{\omega_1 + k\omega_0}^{\omega_2} [f_\mu(\omega - l\omega_0) + f_\mu(\omega + (k-l)\omega_0)] d\omega. \quad (\text{B.3})$$

Введення в другий компонент (B.3) нового індексу додавання $r = k - l$ дає:

$$\sum_{r \in M} \bar{c}_{-r} c_{k-r} \int_{\omega_1 + k\omega_0}^{\omega_2} f_\mu(\omega + r\omega_0) d\omega = \sum_{l \in M} c_l \bar{c}_{l-k} \int_{\omega_1 + k\omega_0}^{\omega_2} f_\mu(\omega + l\omega_0) d\omega.$$

Тоді

$$B_k^{(\xi_f)}(0) = \sum_{l \in M} c_l \bar{c}_{l-k} \int_{\omega_1 + k\omega_0}^{\omega_2} [f_\mu(\omega - l\omega_0) + f_\mu(\omega + (k-l)\omega_0)] d\omega.$$

Додаток К

Беручи до уваги (2.49), маємо:

$$R_{\bar{p}_k p_l}^c(u) = \frac{1}{4} \left[R_{p_k p_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^s(u) - i \left[R_{p_k p_l}^{cs}(u) - R_{p_k p_l}^{sc}(u) \right] \right], \quad (\text{C.1})$$

$$R_{p_k p_l}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{p_k p_l}^c(u) - R_{p_k p_l}^s(u) - i \left[R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{p_k p_l}^{sc}(u) \right] \right], \quad (\text{C.2})$$

$$R_{\bar{q}_k q_l}^c(u) = \frac{1}{4} \left[R_{q_k q_l}^c(u) + R_{q_k q_l}^s(u) - i \left[R_{q_k q_l}^{cs}(u) - R_{q_k q_l}^{sc}(u) \right] \right], \quad (\text{C.3})$$

$$R_{q_k q_l}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{q_k q_l}^c(u) - R_{q_k q_l}^s(u) - i \left[R_{q_k q_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{sc}(u) \right] \right], \quad (\text{C.4})$$

$$R_{\bar{p}_k q_l}^c(u) = \frac{1}{4} \left[R_{p_k q_l}^c(u) + R_{p_k q_l}^s(u) - i \left[R_{p_k q_l}^{cs}(u) - R_{p_k q_l}^{sc}(u) \right] \right], \quad (\text{C.5})$$

$$R_{p_k q_l}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{p_k q_l}^c(u) - R_{p_k q_l}^s(u) - i \left[R_{p_k q_l}^{cs}(u) + R_{p_k q_l}^{sc}(u) \right] \right], \quad (\text{C.6})$$

де

$$R_{p_k p_l}^{c,s}(u) = E p_k^{c,s}(t) p_l^{c,s}(t+u), \quad R_{p_k p_l}^{cs}(u) = E p_k^c(t) p_l^s(t+u), \quad (\text{C.7})$$

$$R_{q_k q_l}^{c,s}(u) = E q_k^{c,s}(t) q_l^{c,s}(t+u), \quad R_{q_k q_l}^{cs}(u) = E q_k^c(t) q_l^s(t+u), \quad (\text{C.8})$$

$$R_{p_k q_l}^{c,s}(u) = E p_k^{c,s}(t) q_l^{c,s}(t+u), \quad R_{p_k q_l}^{cs}(u) = E p_k^c(t) q_l^s(t+u). \quad (\text{C.9})$$

Виходячи з (2.32) і (2.33), знаходимо наступні вирази для авто- та взаємодкореляційних функцій (C.7)–(C.9):

$$R_{p_k p_l}^c(u) = R_{p_k p_l}^s(u) = \frac{1}{4} \left[(a_k a_l + b_k b_l) R_\mu^c(u) + (a_k b_l - b_k a_l) R_\mu^{sc}(u) \right],$$

$$R_{p_k p_l}^{cs}(u) = -R_{p_k p_l}^{sc}(u) = \frac{1}{4} \left[(a_k a_l + b_k b_l) R_\mu^{cs}(u) + (a_k b_l - b_k a_l) R_\mu^c(u) \right],$$

$$R_{q_k q_l}^c(u) = R_{q_k q_l}^s(u) = R_{p_k p_l}^{c,s}(u),$$

$$R_{q_k q_l}^{cs}(u) = \frac{1}{4} \left[(a_k a_l + b_k b_l) R_\mu^{cs}(u) - (a_k b_l - b_k a_l) R_\mu^c(u) \right],$$

$$R_{p_k q_l}^c(u) = R_{p_k q_l}^s(u) = \frac{1}{4} \left[(a_k a_l - b_k b_l) R_\mu^c(u) + (a_k b_l + b_k a_l) R_\mu^{cs}(u) \right],$$

$$R_{p_k q_l}^{cs}(u) = -R_{p_k q_l}^{sc}(u) = \frac{1}{4} \left[(a_k a_l - b_k b_l) R_\mu^{cs}(u) - (a_k b_l + b_k a_l) R_\mu^c(u) \right].$$

Підстановка цих співвідношень у (C.1)–(C.6) дає формули (2.53)–(2.55).

Додаток Л

Виходячи з (3.71), маємо:

$$r_{\bar{\mu}\nu}(u) = \frac{1}{4} \left[r_{\mu\nu}^c(u) + r_{\mu\nu}^s(u) - i \left[r_{\mu\nu}^{cs}(u) - r_{\mu\nu}^{sc}(u) \right] \right], \quad (\text{D.1})$$

$$r_{\mu\nu}(u) = \frac{1}{4} \left[r_{\mu\nu}^c(u) - r_{\mu\nu}^s(u) - i \left[r_{\mu\nu}^{cs}(u) + r_{\mu\nu}^{sc}(u) \right] \right], \quad (\text{D.2})$$

$$r_{\bar{\nu}\mu}(u) = \frac{1}{4} \left[r_{\nu\mu}^c(u) + r_{\nu\mu}^s(u) - i \left[r_{\nu\mu}^{cs}(u) - r_{\nu\mu}^{sc}(u) \right] \right], \quad (\text{D.3})$$

$$r_{\nu\mu}(u) = \frac{1}{4} \left[r_{\nu\mu}^c(u) - r_{\nu\mu}^s(u) - i \left[r_{\nu\mu}^{cs}(u) + r_{\nu\mu}^{sc}(u) \right] \right], \quad (\text{D.4})$$

де

$$r_{\mu\nu}^{c,s}(u) = E\mu^{c,s}(t)v^{c,s}(t+u), \quad r_{\mu\nu}^{cs}(u) = E\mu^c(t)v^s(t+u). \quad (\text{D.5})$$

Використовуючи співвідношення (3.51) і (3.52), виразимо кореляційну функцію (D.5) через величини, що залежать від кореляційних функцій квадратур $p_{c,s}(t)$ і $q_{c,s}(t)$:

$$r_{\mu\nu}^c(u) = r_{\mu\nu}^s(u) = \frac{1}{4} \left[r_p^c(u) - r_q^s(u) + 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u) \right], \quad (\text{D.6})$$

$$r_{\mu\nu}^{cs}(u) = -r_{\mu\nu}^{sc}(u) = \frac{1}{4} \left[r_p^{cs}(u) - r_q^{cs}(u) - 2\tilde{r}_{pq}^c(u) \right], \quad (\text{D.7})$$

$$r_{\nu\mu}^c(u) = r_{\nu\mu}^s(u) = \frac{1}{4} \left[r_p^c(u) - r_q^s(u) - 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u) \right], \quad (\text{D.8})$$

$$r_{\nu\mu}^{cs}(u) = -r_{\nu\mu}^{sc}(u) = \frac{1}{4} \left[r_p^{cs}(u) - r_q^{cs}(u) + 2\tilde{r}_{pq}^c(u) \right]. \quad (\text{D.9})$$

Після підстановки співвідношень (D.6)–(D.9) у (D.1)–(D.4) отримуємо формули (3.75) та (3.76).