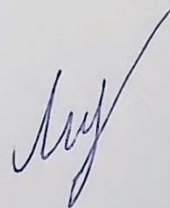


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЛИЧАК ОЛЕГ ВАСИЛЬОВИЧ



УДК 519.23/.25: 621.391

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ
ДЕФЕКТІВ МЕХАНІЗМІВ НА ПОЧАТКОВИХ СТАДІЯХ РОЗВИТКУ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи
05 технічні науки

РЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

ТЕРНОПІЛЬ – 2025

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Виявлення дефектів у складних динамічних технічних системах є складовою частиною діагностики таких систем. Технічна діагностика – це перевірка симптомів для визначення характеру несправностей або відмов технічних систем. Сучасна діагностика означає такі терміни як несправність, відмова та дефект. Під несправністю (“fault”) розуміють стан предмета, пристрою чи системи, який виникає, коли один із компонентів або вузлів деградує чи виявляє ненормальну поведінку. Під відмовою (“failure”) розуміють втрату здатності предмета, пристрою чи системи до виконання необхідних функцій. Відмова, за означенням, є подією, тоді як несправність є станом системи. Дефектом в стандартному означенні вважається відхилення контрольованого параметру за межі встановленого допуску, тобто це стан вузла чи елемента системи. Діагностика дефектів на ранніх стадіях зародження і розвитку, до появи у системі симптомів типу “збій” чи “відмова” є важливою складовою структури підтримання її життєвого циклу досліджуваної структури (системи, механізму). Раннє виявлення несправностей, які ще не привели до аварійних ситуацій, визначення ступеня розвитку дефекту та його ознак можливі лише на основі детального вивчення структури діагностичних сигналів та її зв'язку з кінематикою і динамікою досліджуваної системи. Опис структури сигналів, в свою чергу, можливий на основі адекватних математичних моделей, які відображають ті їх риси, що є необхідними для встановлення стану системи. Характерними ознаками коливних процесів у нелінійних динамічних системах є повторюваність, що зумовлена циклічним принципом дії багатьох механізмів, та стохастичність, яка є наслідком випадкового характеру властивого всім параметрам елементів реальної системи – від похибок їх виготовлення та установки до флуктуацій товщини і якості змазки, стохастичних варіацій сил тертя, спонтанних змін навантаження чи живлення, впливом турбулентності зовнішніх потоків повітря на роботу турбіни і т. п. Оскільки поява дефектів приводить до нелінійності динамічних систем, то повторюваність і стохастичність виступають у властивостях коливань не незалежно, а у взаємодії, що проявляється у складній взаємній модуляції складових діагностичних сигналів. Саме в характері такої взаємодії проявляються ті властивості коливного процесу, які в багатьох випадках є визначальними для встановлення стану досліджуваного об'єкта, що його породжує. Найбільш відповідними моделями для опису та аналізу складної взаємодії регулярних та стохастичних складових у складі діагностичних сигналів є періодичні та майже періодичні нестационарні випадкові процеси (ПНВП). Такі випадкові сигнали та їх математичні моделі також відомі в літературі як циклостационарні. Перші роботи з розробки теоретичних моделей дослідження ПНВП (циклостационарних процесів, періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП)) були зроблені в працях Н. Hurd, W. Gardner, J. Antoni, Н. Ogura, О. Коронкевича, Л. Гудзенко, Є. Гладишева, Я. Драгана, І. Яворського, Б. Марченка, М. Мисловича, Н. Шульженко, М. Приймака, Б. Яворського.

Підхід, що ґрунтується на моделях періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП), був започаткований Я.П. Драганом та І.М. Яворським у Фізико-механічному інституті ім. Г.В. Карпенка НАН України спочатку для аналізу нестационарних сигналів в акустиці, згодом для моделювання процесів у геофізиці, та розвинутий і апробований професором І.М. Яворським та його учнями для аналізу діагностичних сигналів вібрації різноманітних механізмів та систем. У фундаментальній монографії І. Яворського викладено основні принципи побудови моделей періодично нестационарних випадкових сигналів (ПНВС).

На даний час існують дві основні групи широко використовуваних підходів до аналізу ПНВС. Першою є “класичний” підхід, котрий називають методом “обвідної”, що зводиться до прямого детектування діагностичного сигналу і дослідження виділеної низькочастотної складової методами Фур’є-аналізу чи виділення так званого “квадрату обвідної” і дослідження його Фур’є-спектру. Цей підхід є найдавнішим, найпростішим і досі широко використовується у різних варіантах – прямого детектування, пошуку та виділення “інформаційної смуги частот” різними методами та ряду інших. Основним недоліком цих методів є той, що обробка сигналу ведеться без врахування взаємкореляційних зв’язків між різними його складовими.

Іншою групою методів обробки сигналу ПНВС є виділення модуля аналітичного сигналу чи квадрату модуля аналітичного сигналу на основі використання перетворення Гільберта для демодуляції сигналу. Суттєвою перевагою цього підходу є можливість аналізу одночасно усіх видів модуляцій несучої – амплітудної, частотної та фазової, а також їх ефективне розділення. Чисто “механічне” перенесення формалізму перетворення Гільберта на аналіз багатокomпонентних широкосмугових сигналів, нехтування відомими суттєвими обмеженнями у застосуванні перетворення Гільберта до обробки модульованих сигналів сформульованих теоремами Бедрояна та Наттала, призводить як до помилок при виявленні дефектів, так і до суттєвих похибок при їх класифікації та оцінюванні ступеня розвитку. Існують методи декомпозиції ПНВС на вузькосмугові складові з наступним використанням перетворення Гільберта, найбільш відомим серед яких є метод Гільберта-Хуанга та його різні версії, однак всі вони є евристичними і не мають теоретичного обґрунтування. Тобто з однієї сторони існує необхідність у детальному аналізі складного діагностичного сигналу від механізму, котрий не проявляє стандартних ознак несправності для виявлення дефектів на початкових стадіях розвитку, а з іншої сторони – відсутні теоретично обґрунтовані моделі таких сигналів та методи їх аналізу.

Це протиріччя становить суть наукової проблеми: розробки методів статистичного аналізу сигналів вібрацій пошкоджених механізмів на основі математичних моделей багатокomпонентних нестационарних випадкових процесів зі стохастичною амплітудно-фазовою модуляцією несучих гармонік і з використанням перетворення Гільберта та дослідження їх кореляційно-спектральної структури, що дає можливість встановлювати типи дефектів у механізмах, їх локалізацію та оцінювати ступінь розвитку.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження за темою дисертації проводились у Фізико-механічному інституті ім. Г.В. Карпенка НАН України при виконанні ряду держбюджетних тем НАН України: “Розроблення нових інформаційних технологій спекл-кореляції і фазозсувної спекл-інтерферометрії для дослідження напружено-деформованого стану поверхонь зразків конструкційних матеріалів та динаміки їх руйнування” (2004-2006, держреєстраційний номер 0104U004176); “Дослідження структури просторових полів переміщень і деформацій поверхонь конструкційних матеріалів методами спекл-метрології та інтерферометрії” (2007-2009, 0107U004068); “Розроблення методів визначення параметрів локального руйнування конструкційних матеріалів під дією статичних і циклічних навантажень на основі фазозсувної інтерферометрії і спекл-кореляції” (2010-2012, 0110U000432); “Встановлення методами спекл-метрології та інтерферометрії деформаційних характеристик матеріалів для оцінювання параметрів їх руйнування з урахуванням локальних зон пружно-пластичного стану” (2013-2015, 0113U000306); “Розроблення технологій діагностування елементів конструкцій та локального руйнування засобами оптичної спекл-метрології, фазозсувної інтерферометрії та цифрової голографії” (2016-2018, 0116U004952); “Розроблення інформаційних технологій та засобів вібраційної

діагностики на основі періодично нестационарних нелінійних моделей з використанням перетворення Гільберта” (2019-2021, 0119U101061); “Інформаційно-вимірвальна система вібраційного контролю для неперервного моніторингу обертових вузлів” (2021, 0121U110376); “Розроблення методів кореляційного аналізу поліритмічної структури вібраційних сигналів для підвищення ефективності діагностики елементів вузлів механізмів з різними швидкостями обертання” (2022-2024, 0122U002138); науково-дослідних робіт програми “Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин” (РЕСУРС), в рамках цільової програми наукових досліджень НАН України “Надійність і довговічність матеріалів, конструкцій, обладнання та споруд” “Спеціалізовані пристрої для виявлення дефектів на ранніх стадіях їх зародження при визначенні технічного стану механізмів” (2018-2020, 0119U101190); ряду госпдоговорів з діагностування вугільних конвеєрів у морському торговому порту ЮЖНИЙ (2019, 2023); приводу стрілового конвеєру судно-навантажувальної машини на ТОВ “ТІС-РУДА”, с. Візирка, Одеська обл. (2018, 2020); головних механізмів приводу контейнерних перевантажувачів та механізмів кабельних барабанів спредерів причальних контейнерних перевантажувачів “ZPMC” інв. № 7001–№ 7003, що належать ТОВ “Бруклін-Київ Порт”, оператору контейнерного терміналу на базі причалів № 42-43 ДП “Одеський морський торговельний порт” (2019, 2023), діагностики підшипникових вузлів візків трамвайного вагона T5L641 на ТОВ “ЗАВОД ЕЛЕКТРОНМАШ” (2023, 2024), вібраційного стану підшипникових вузлів приводів фрез дисольверів ТОВ “Флексорес” (2023), “Дослідження сигналів вібрації методами нестационарних випадкових процесів для встановлення стану елементів обертових вузлів газотурбінних двигунів ДП “Івченко-Прогрес” (2024-2025).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження моделей діагностичних сигналів у вигляді періодично нестационарних випадкових процесів зі стохастичною амплітудно-фазовою модуляцією несучих гармонік і розроблення методів їх аналізу на основі перетворення Гільберта для встановлення характерних особливостей модуляції з метою підвищення ефективності виявлення і визначення параметрів пошкоджень на ранніх стадіях розвитку.

Досягнення означеної мети зумовило постановку і вирішення таких завдань:

- проаналізовано процеси генерації нових стійких станів (дефектів) на основі моделей нелінійних динамічних систем зі збуренням;
- проведено порівняльний аналіз когерентних і компонентних ПНВС-методів виявлення прихованих періодичностей та отримано оцінки похибок періоду нестационарності;
- досліджено перетворення Гільберта багатокомпонентного ПНВС і кореляційну структуру аналітичного сигналу;
- проведено теоретичний аналіз моделі ПНВС за широкосмугової, вузькосмугової та амплітудно-фазової модуляції несучої;
- проаналізовано смугову фільтрацію високочастотно-модульованого багатоконпонентного ПНВС і запропоновано метод розділення компонент;
- показано, що фільтрація сигналу ПНВС повинна базуватися на оцінці взаємних кореляцій вузькосмугових високочастотних компонент, використання смуги що охоплює не всі корельовані гармоніки призводить до зниження ефективності діагностування;
- показано, що періодична нестационарність другого порядку ПНВС викликана взаємними кореляціями різних високочастотних компонент, а взаємні кореляції їх квадратур можна використати для опису пошкодження та його специфічних особливостей;

- розроблено алгоритми та створено програмне забезпечення для реалізації ПНВС-методу обробки діагностичних сигналів на основі перетворення Гільберта та аналітичного сигналу;

- проведено симуляцію реалізації ПНВС та аналіз симульованих даних запропонованими методами;

- проведено обробку реальних діагностичних сигналів на основі розробленої моделі та порівняльний аналіз отриманих результатів з кращими відомими методами;

- проаналізовано властивості амплітудних спектрів детерміністичних коливань і часових змін дисперсії для розподіленого та локалізованого дефектів.

Об'єктом дослідження є діагностичні сигнали мішаної природи від машин і агрегатів зі складними взаємними модуляціями та потужними регулярними і стохастичними компонентами.

Предметом дослідження є математичні моделі періодично нестационарних випадкових сигналів, побудовані на основі перетворення Гільберта та аналітичного сигналу, методи оцінювання їх спектральних та імовірнісних характеристик і встановлення зв'язків між кореляційними, спектральними характеристиками сигналів та ранніми стадіями розвитку дефектів в системах.

Методи досліджень. Для вирішення поставлених завдань в дисертаційній роботі застосовуються методи теорії випадкових процесів, математичної статистики, методи неперервного та дискретного Фур'є аналізу, методи обчислювальної математики; методи статистичної теорії періодично нестационарних випадкових процесів, методи розв'язування нелінійних рівнянь, метод малого параметру, комп'ютерне моделювання, а також експериментальні дослідження.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі вперше вирішено важливу науково-прикладну проблему, котра полягає у розробці методів статистичного аналізу сигналів вібрацій пошкоджених механізмів на основі математичних моделей багатокомпонентних нестационарних випадкових процесів зі стохастичною амплітудно-фазовою модуляцією несучих гармонік і з використанням перетворення Гільберта досліджено їх кореляційно-спектральну структуру, що дає можливість встановлювати типи дефектів у механізмах, їх локалізацію та оцінювати ступінь розвитку.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному, а саме:

вперше:

- сформульовано означення ранньої стадії розвитку дефекту як періодично нестационарного випадкового процесу в околі точки біфуркації нелінійної динамічної системи зі збуренням, котрий супроводжується появою в поведінці системи прихованих коливань, що дало можливість сформулювати вимоги до побудови моделі діагностичних сигналів;

- встановлено, що до періодичної нестационарності (прихованої періодичності) призводять взаємні кореляції між модулюючими процесами, що дозволило визначити діагностичні параметри сигналів для виявлення та оцінки ступеня розвитку дефектів;

- розроблено теоретичні основи використання перетворення Гільберта для аналізу діагностичних ПНВС, що характеризуються широкосмуговою високочастотною модуляцією несучих. Показано, що перетворення Гільберта безпосереднього не може використовуватися для демодуляції такого сигналу;

- показано, що аналітичний сигнал від ПНВС з високочастотною широкосмуговою та амплітудно-фазовою модуляцією несучих є також ПНВС, а квадрат модуля аналітичного сигналу, який називають "квадратом обвідної" є випадковим процесом, моментні функції якого змінюються періодично з часом, тому його аналіз необхідно

проводити методами ПНВС, встановлено, що застосування відомих методів “обвідної”, “спектру квадрату обвідної” для аналізу багатокomпонентних ПНВС є некоректним;

- показано, що стохастично амплітудно-фазово модульовані коливання ПНВС представляються суперпозицією високочастотних компонент, які є стаціонарними і взаємно періодично нестационарно зв'язаними випадковими процесами, що зводить дослідження властивостей сигналу до аналізу кореляційних компонентів вищих порядків квадратур високочастотних несучих;

- показано, що фільтрація сигналу ПНВС повинна базуватися з врахуванням оцінок взаємних кореляцій високочастотних компонент вищих порядків, що дозволило сформулювати вимоги до коректного вибору смуги обробки ПНВС та підвищити ефективність діагностування;

- показано, що використання смугової фільтрації і перетворення Гільберта для виділення та аналізу кореляцій квадратур високочастотних гармонік дає змогу побудувати карту кореляцій, котра має характерні особливості для різних дефектів і служить основою для обґрунтованого вибору смуги частот при аналізі сигналу;

- обґрунтовано процедури відбору та обробки діагностичних сигналів, які дають можливість виявити і описати в рамках моментних функцій ПНВП першого і другого порядків їх структуру, в тому числі структуру високочастотної, широкосмугової та амплітудно-фазової модуляції, що забезпечило вищу ефективність діагностики у порівнянні з відомими підходами;

- розроблений підхід застосований до аналізу розподіленого і локального дефектів механізмів в рамках моментних функцій першого і другого порядків, описані основні закономірності та відмінності між сигналами таких дефектів, проведено демодуляцію високочастотних компонент та описана їх кореляційна структура на основі побудованих карт кореляцій;

- встановлено, що високочастотна модуляція несучих гармонік ПНВС моделі вібрацій підшипника є вузькосмуговою і може бути описана суперпозицією представлень сигналу за формулами Райса;

- показано, що кореляції квадратур модуляцій є повільно зникаючими осцилюючими функціями часового зсуву, що зумовлює схожу форму кореляційних компонентів, а інтервал зникання кореляційних компонентів є набагато більшим від періоду нестационарності.

Практичне значення одержаних результатів. Введені моделі ПНВС на основі перетворення Гільберта і аналітичного сигналу дають можливість кількісно характеризувати взаємозв'язки між складовими діагностичного сигналу, на основі експериментальних даних виявляти, типізувати та оцінювати стан дефектів у системах на ранніх стадіях розвитку, встановити їх походження та фізичну природу.

Отримані наукові результати доцільно використовувати в галузі діагностики систем різної природи та в якості підсистем в системах управління життєвим циклом.

Практична цінність роботи полягає, насамперед, у створенні моделей, методів ПНВС та програмно-алгоритмічного забезпечення для аналізу діагностичних сигналів різного походження. Це надає можливість виявляти сигнал від дефекту, встановлювати оптимальні параметри обробки цього сигналу, отримувати оцінку розвитку дефекту, ідентифікувати його тип та походження. Такі дані є важливими як для встановлення поточного стану систем, так і прогнозування цього стану на заданий період часу. Рання діагностика дефектів у системах є важливим аспектом забезпечення їх надійності і працездатності, зменшення затрат на підтримку працездатності; планування і забезпечення ремонтів та технічного обслуговування.

Результати дисертаційних досліджень використано у Фізико-механічному інституті ім. Г.В. Карпенка НАН України при виконанні держбюджетних тем.

Практична цінність запропонованих у дисертаційній роботі моделей періодично нестаціонарних випадкових сигналів, методів їх декомпозиції та аналізу для виявлення, локалізації та оцінювання ступеня розвитку дефектів в механізмах підтверджується результатами їх практичного використання при проведенні діагностичних робіт на ряді промислових підприємств України, зокрема на теплових електростанціях у смт. Добротвір (Львівська обл.), ДП “Одеський морський торговельний порт”, ТОВ “ЗАВОД ЕЛЕКТРОНМАШ”, ДП “Морський торговельний порт “Южний” (Одеська обл.).

Результати дисертаційної роботи впроваджено у ряді підприємств України: ТОВ “Кипер-Пласт”, спеціалізований експертно-технічний центр ТОВ Фірма “ДІАЛАБ” Лтд, ТОВ “ПОРТТЕХЕКСПЕРТ”, ТОВ “ДП Ворлд ТІС Південний”, що підтверджено відповідними актами.

Результати дослідження можуть бути використані при виконанні науково-дослідних робіт у Фізико-механічному інституті ім. Г.В. Карпенка НАН України. Також результати роботи можуть бути використані при виконанні робіт по встановленню технічного стану механізмів паливно-енергетичного сектору, виявлення рівня підвищеної вібрації елементів складних машинних комплексів на промислових підприємствах України, діагностування газотурбінних двигунів на підприємствах-виробниках та експлуатантах відповідної техніки.

Особистий внесок здобувача. У працях, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належить: [1] – аналіз властивостей аналітичного сигналу за різних видів і типів модуляцій, обробка даних, представлення та аналіз матриці кореляцій; [2] – оцінка прихованої періодичності в складі сигналу, аналіз та обробка даних; [3] – модель сигналу ПНВС пошкодженого підшипника; [4] – модель дефектів і спосіб аналізу нестаціонарного сигналу кореляційним методом; [5] – метод оцінювання похибок параметрів Вільямса визначених на основі даних цифрової кореляції зображень; [6] – метод компенсації похибок зміщення параметрів Вільямса визначених на основі даних цифрової кореляції зображень; [7] – модель вібро-сигналу, отримання та обробка даних; [8] – отримання та обробка даних спекл-зображень [9] – метод оцінювання похибки визначення параметрів Вільямса; [10] – метод виділення корельованих сигналів квадратур фазової модуляції; [11] – дослідження і аналіз сигналу віброприскорення; [12] – обґрунтування вибору моделі сигналу віброприскорення; [13] – метод моделювання і оцінки похибки визначення параметрів Вільямса; [14] – модель ПНВС сигналу та його перетворення Гільберта; [15] – модель високочастотно модульованого сигналу; [16] – метод оцінювання прихованого періоду в структурі сигналу; [17] – модель модульованого біперіодичного сигналу; [18] – обробка даних віброприскорення; [19] – побудова моделі детермінованої складової сигналу; [20] – обробка даних, модель несучої сигналу; [21] – принцип попередньої обробки зареєстрованого сигналу; [22, 23] – модель сигналу вібро-прискорення; [24] – модель модуляції сигналу; [25] – перетворення Гільберта від моделі сигналу; [26] – модель ПНВС; [27] – модель і метод визначення спектру перетвореного сигналу; [28] – методи детектування фазової модулюючої складової; [29] – модель вузькосмугової високочастотної модуляції ПНВС; [34] – виділення та кореляційний аналіз складових квадратур ПНВС вищих порядків; [35] – модель виділення квадратур моделюючої складової; [36] – метод виділення квадратур; [37] – обробка сигналу віброприскорення; [38] – модель широкосмугової високочастотної модуляції сигналу віброприскорення; [39] – модель вузькосмугової високочастотної модуляції в структурі сигналу; [40] – модель високочастотної

модуляції сигналу; [41] – модель та визначення базової частоти ПНВС; [42, 43] – виділення квадратур модулюючих складових; [44] – обробка даних віброприскорення, побудова та аналіз кореляційної матриці відібраного сигналу; [45] – методи діагностики двигуна; [46] – опис сигналів підшипника методами ПКВП; [47] – принцип відбору діагностичного сигналу; [48–51, 76] – структура вібродіагностичної системи; [52] – метод виділення спектральних компонент; [53, 55–59, 69] – структура методу обробки сигналу; [54] – постановка експерименту; [60] – модель модуляції діагностичного сигналу; [61–63] – дослідження впливу нестаціонарності на аналіз вібраційних сигналів; [64] – метод відбору сигналу; [65, 66] – особливості об’єктів діагностики; [67, 71] – структура системи відбору сигналів; [68] – опис структури параметрів сигналів; [70, 72–74] – методи відбору сигналів; [75] – вібраційний метод діагностики; [77] – модель модуляції несучих гармонік.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи пройшли апробацію на міжнародних наукових та науково-практичних конференціях, зокрема на: 3 KhPI Week on Advanced Technology (Харків, 2022); 11, 12, 13 і 14 International Conferences on Advanced Computer Information Technologies (Germany, 2021; Slovakia, 2022; Poland, 2023; Czech Republic, 2024); 12 і 13 International Conferences on Electronics and Information Technologies (Львів, 2021, 2023); XX Міжнародній науково-технічній конференції “Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта” (Київ, 2019); XX, XXI, XXII і XXIII Міжнародних науково-технічних конференціях “Приладобудування: стан і перспективи” (Київ, 2021, 2022, 2023, 2024); 14, 15, 16 і 17 Міжнародних науково-практичних конференціях “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (Київ, 2021, 2022, 2023, 2024); 2 Міжнародній конференції “Неруйнівний контроль та моніторинг технічного стану”. (Одеса, 2021); Міжнародній науково-практичній конференції “Міцність і довговічність сучасних матеріалів та конструкцій” присвяченій 70-ти річчю з дня народження член-кореспондента НАН України, проф. П. Яснія (Тернопіль, 2022); конференції “Зварювання та технічна діагностика для відновлення економіки України” (Київ, 2022); Міжнародному симпозиумі українських інженерів-механіків (Львів, 2023); III Міжнародній науково-технічній конференції “Перспективи розвитку машинобудування та транспорту” (Вінниця, 2023); XIV Міжнародній науково-практичній конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем” (Чернігів, 2024); Міжнародній науково-практичній конференції “Перспективи розвитку озброєння та військової техніки сухопутних військ” (Львів, 2024).

Результати доповідалися на регулярних семінарах відділу № 9 “Методів і засобів відбору й обробки діагностичних сигналів” ФМІ ім. Г. В. Карпенка НАН України впродовж 2021-2024 рр. У повному обсязі робота доповідалася та обговорювалася на розширеному науковому семінарі відділів № 2 “Акустичних методів та засобів технічної діагностики”, № 8 “Інформаційних технологій дистанційного зондування” та відділу № 9 “Методів і засобів відбору й обробки діагностичних сигналів”.

Публікації. Результати роботи викладені в 77 наукових публікаціях, серед яких 29 у наукових фахових виданнях України та закордонних виданнях, з них 10 статей включено в наукометричні бази Scopus та/або Web of Science (з них, відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank або Journal Citation Reports, 6 статей віднесено до квартилю Q1-Q2, та 4 – до квартилю Q3), та 44 публікації у матеріалах міжнародних та всеукраїнських конференцій (з них 11 публікацій включено в наукометричні бази Scopus та/або Web of Science), 4 патенти. Загалом 21 публікація, що відображає основні результати роботи, які включено до наукометричної бази Scopus та/або Web of Science.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел з 258 найменування на 27 сторінках та додатку на 24 сторінках. Загальний обсяг дисертації 344 сторінки, з них 292 сторінки основного тексту. Робота містить 79 рисунків та 11 таблиць.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та задачі досліджень, показано зв'язок із науковими програмами, планами, темами, висвітлено наукову новизну та практичну значимість отриманих результатів. Наведено відомості про апробацію роботи та публікації.

У **першому розділі** виконано аналіз структури систем підтримки життєвого циклу механізмів (машин, систем) та показано важливість виявлення дефектів на ранній стадії їх розвитку. Раннє виявлення дефектів у системах ще до появи збоїв чи відмов дозволяє суттєво знизити імовірність аварій та є вкрай важливим інструментом для підтримки заданого рівня надійності їх функціонування, оптимізації планування робіт з ремонту та технічного обслуговування і продовження строку служби понад проєктований. Показано, що відсутність стандартизованого означення дефекту на ранній стадії розвитку призводить до ігнорування таких дефектів при діагностуванні систем.

Появу дефекту та його розвиток у системі можливо описати лише в рамках нелінійних моделей динамічних систем зі збуренням. З огляду на складність структури діагностичних сигналів не існує загальних моделей діагностичних сигналів чи строго обґрунтованої методології їх аналізу. Незважаючи на значну різноманітність таких моделей сигналів та методів їх обробки переважна більшість з них ґрунтується на певних евристичних моделях і припущеннях, що суттєво обмежує їх можливості. Найбільш близькими моделями для обробки діагностичних сигналів механізмів є моделі циклостаціонарних процесів та періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП).

Методи обробки діагностичних сигналів, що базуються на використанні перетворення Гільберта та аналітичного сигналу дозволяють вести аналіз складно модульованих сигналів, однак їх застосування обмежується відсутністю теоретично обґрунтованих моделей багатокomпонентного сигналу та методології його демодуляції. Чисто "механічне" перенесення формалізму перетворення Гільберта на аналіз багатокomпонентних широкосмугових сигналів, нехтування відомими суттєвими обмеженнями у застосуванні перетворення Гільберта призводить як до помилок при виявленні дефектів так і до суттєвих похибок при їх класифікації та оцінюванні ступеня розвитку. Існуючі методи декомпозиції ПНВС на вузькосмугові складові з наступним використанням перетворення Гільберта найбільш відомим серед яких є метод Гільберта-Хуанга та його різні версії є евристичними і не мають теоретичного обґрунтування.

Таким чином, суть наукової проблеми полягає у розробленні методів статистичного аналізу сигналів вібрацій пошкоджених механізмів на основі математичних моделей багатокomпонентних нестационарних випадкових процесів зі стохастичною амплітудно-фазовою модуляцією несучих гармонік і з використанням перетворення Гільберта та дослідження їх кореляційно-спектральної структури, що дає можливість встановлювати типи дефектів у механізмах, їх локалізацію та оцінювати ступінь розвитку.

У **другому розділі** проаналізовано математичні моделі нелінійних динамічних систем зі збуренням. У рамках синергетичного підходу до аналізу нелінійних динамічних систем зі збуренням перехід системи до якісно нового стану (точка біфуркації системи) супроводжується коливаннями у системі, котрі є складною взаємодією коливних, квазіколивних та чисто випадкових складових і має ознаки нестационарності та стохастичності. Зародження нових прихованих сутностей (у тому

числі дефектів) в нелінійній динамічній системі має хаотичну природу, що супроводжується виникненням прихованих коливань. Частоти цих коливань не завжди відповідають власним частотам системи, хоча й можуть співпадати з ними. Ці коливання не є наслідком відомого явища стохастичного резонансу. Спектр коливань, що виникають у нелінійній динамічній системі унаслідок біфуркації може бути вузькосмуговим, широкосмуговим, лінійчатим, зі складними взаємними амплітудними та фазовими модуляціями. Такі коливання можуть бути періодичними, малоцикловими, або стохастичними. За певних умов у нелінійній динамічній системі зі збуреннями можливе також виникнення так званих “каскадних біфуркацій”, коли розвиток критичної біфуркації призводить до розгалужень (появи нових біфуркацій) у певних точках траєкторії розвитку системи з відповідними новими власними частотами прихованих коливань у кожній точці. Розвиток за критичних циклічних, малоциклових біфуркацій у формі коливань в системі може перериватися ділянками з генерацією шумів в точках розгалужень. Наведено схему можливих співіснуючих сімейств неявних резонансів у неавтономних нелінійних системах.

Ранню стадію розвитку дефекту у динамічній нелінійній системі зі збуренням не можна вважати станом чи подією згідно з існуючими стандартними означеннями. На підставі аналізу відомих результатів застосування методів синергетики для теоретичних досліджень процесів виникнення нових станів у нелінійних динамічних системах зі збуренням сформульовано означення ранньої стадії розвитку дефекту як періодично нестационарного випадкового процесу, причому цей процес породжується складною взаємодією коливних, квазіколивних та чисто випадкових складових, має ознаки нестационарності, стохастичності і розвивається. Коливання, що виникають у нелінійній динамічній системі унаслідок біфуркації проявляються при діагностиці системи як періодично нестационарний випадковий сигнал. Виявлення, виокремлення, оцінювання та класифікація діагностичних сигналів від дефектів на ранніх стадіях розвитку має базуватися на ПНВС представленні сигналу та спеціально розроблених для цього представлення моделях сигналу і методах обробки для оцінювання прихованих частотних складових у структурі діагностичного сигналу та їх взаємних модуляцій.

У **третьому розділі** виконано дослідження оцінок періоду періодично нестационарного випадкового сигналу, як перший крок при вирішенні проблеми пошуку прихованих періодичностей. Виконано порівняльний аналіз когерентного та компонентного методів кореляційного аналізу сигналу при невідомому періоді нестационарності. Розглянуто модель прихованих періодичностей для ПНВС. Показано, що періодичність у ПНВС може проявлятися або лише в імовірнісних характеристиках першого порядку, тобто в характеристиках регулярної складової коливань, або лише у характеристиках другого порядку, які описують флуктуаційні коливання, або в характеристиках як регулярної, так і стохастичної складових.

У роботах присвячених статистичному аналізу ПНВС у випадку, коли період нестационарності є невідомим, було показано, що когерентна

$$\hat{m}(\tau, t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t+n\tau)$$

і компонентна

$$\begin{Bmatrix} \hat{m}_k^c(\tau) \\ \hat{m}_k^s(\tau) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) \begin{Bmatrix} \cos k \frac{2\pi}{\tau} t \\ \sin k \frac{2\pi}{\tau} t \end{Bmatrix} dt$$

статистики як функції пробного періоду τ досягають екстремальних значень в точках, які можуть бути прийняті як оцінки періоду нестационарності, а екстремальні значення компонентних статистик другого порядку є оцінками кореляційних компонентів.

$$\begin{cases} \hat{B}_k^c(\hat{T}, u) \\ \hat{B}_k^s(\hat{T}, u) \end{cases} = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t-u) \begin{cases} \cos k \frac{2\pi}{\hat{T}} t \\ \sin k \frac{2\pi}{\hat{T}} t \end{cases} dt \quad \overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - \hat{m}(\hat{T}, t).$$

Представлення ПНВС через стаціонарно зв'язані компоненти:

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} \quad (1)$$

є важливим для розуміння ПНВС як моделі прихованої періодичності. Як видно з (1), ПНВС може бути представлений як сума стохастично модульованих за амплітудою і фазою гармонік, частоти яких є кратними до деякої основної (базової) частоти ω_0 . Середні значення модулюючих процесів $\xi_k(t)$ є коефіцієнтами Фур'є функції $m(t): E\xi_k(t) = m_k$. Взаємкореляційні функції $R_{kl}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k(t) \overset{\circ}{\xi}_l(t+u)$ стаціонарно зв'язаних компонент $\xi_k(t)$, де $\overset{\circ}{\xi}_k(t) = \xi_k(t) - m_k$, а “ $\bar{\cdot}$ ” означає комплексне спряження, номери яких зміщені на r , визначають r -ий кореляційний компонент:

$$B_r(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_{k+r,k}(u) e^{-ik\omega_0 u}.$$

З останнього виразу випливає, що взаємні кореляції між модулюючими процесами $\xi_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, приводять до періодичної нестационарності другого порядку.

Автокореляційні функції цих процесів $R_{kk}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k(t) \overset{\circ}{\xi}_k(t+u)$ визначають нульовий кореляційний компонент ПНВС.

З представлення через стаціонарно зв'язані компоненти отримуються окремі випадки моделей прихованих періодичностей у вигляді ПНВС: адитивна, мультиплікативна, адитивно-мультиплікативна, квадратурна та інші.

Структура прихованих періодичностей в рамках ПНВС-моделі визначається структурою модулюючих процесів $\xi_k(t)$. Періодичність у ПНВС може проявлятися винятково тільки в імовірнісних характеристиках першого порядку, тобто в характеристиках детермінованої складової коливаль, чи винятково тільки в характеристиках другого порядку, які описують флуктуаційні коливання, або і в тих, і в других. Проведено порівняння точності когерентного та компонентного методів виявлення прихованих періодичностей для Гаусових ПНВС з використанням методу малого параметра, отримано формули для зміщення й дисперсії оцінок періоду і доведено їх асимптотичну незміщеність і слушність.

У випадку когерентного оцінювання можна знайти оцінки періоду функції математичного сподівання чи кореляційної функції на довільному інтервалі часу незалежно від їх гармонічного складу. Обчислюючи їх на інтервалі, ми можемо провести гармонічний аналіз цих величин. У випадку компонентного методу ми оцінюємо амплітуду тільки однієї з гармонік і для оцінювання її часової залежності ми повинні знаходити оцінки амплітуд кожної з можливих гармонік з частотою, кратною до основної. Тому доцільно на першому етапі аналізу експериментальних даних застосовувати когерентний метод, а потім використовувати компонентний метод, який дає можливість відфільтрувати незначні за величиною гармоніки.

Для величини зміщення оцінки функції математичного сподівання маємо:

$$\varepsilon[\hat{m}(t)] = -\frac{3}{N(N+1)(2N+1)^2 m''(t)} \sum_{m,n=-N}^N \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} b(t+nx, my-nx) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} + O(N^{-1}).$$

Дисперсія оцінки функції математичного сподівання для Гаусового ПНВС:

$$D[\hat{m}(t)] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{2N+1} \right) b(t, nT) + \\ + \frac{18}{\left[N(N+1)(2N+1)^2 m''(t) \right]^2} \left[\sum_{n=-N}^N \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} b(t+nx, my-nx) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} \right]^2 + O(N^{-2}).$$

Перша складова цього виразу співпадає з формулою для дисперсії оцінки функції математичного сподівання при відомому періоді, а друга визначає величину, на яку зростає дисперсія у випадку, коли період потрібно попередньо оцінювати. Аналіз другої складової показує, що вона має порядок $O(N^{-2})$. Отримані також вирази для зміщення оцінок кореляційної функції.

Для дисперсії оцінки кореляційної функції отримано:

$$D[\hat{b}(t,u)] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{2N+1} \right) \left[b(t, nT) b(t+u, nT) + b(t, u+nT) b(t, u-nT) \right] + \\ + \frac{9}{\left[N(N+1)(2N+1)^2 m''(t) \right]^2} \sum_{r,n=-N}^N \sum_{k,l=-N}^N \left[\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4} \times \right. \\ \left. \times H(t+zx_1, t+nx_2, t+u+nx_2, t+kx_3, t+lx_4, t+u+lx_4) \right]_{\substack{x_1=x_2=T \\ x_3=x_4=T}} + O(N^{-3}).$$

Дисперсія оцінок кореляційних компонентів для Гаусових ПНВС:

$$D[\hat{B}_k(u)] = \frac{1}{\theta} \int_0^{2\theta} \left(1 - \frac{\tau}{2\theta} \right) \tilde{B}_0(\tau, u) \cos k\omega_0 \tau d\tau + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{\substack{l \in Z \\ l \neq Z}} \int_0^{2\theta} \tilde{B}_l(\tau, u) h_l(-\theta, \theta-u) \times \\ \times \cos k\omega_0 \tau d\tau + \frac{9k^2 \omega_0^2}{T^2 \left[N(N+1)(2N+1) m''(t) \right]^2} \sum_{n,r=-N}^N \frac{1}{4\theta^2} \int_{-\theta}^{\theta} s_1 s_1 \times \\ \times \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(s_1, s_1+u, t+nx, s_2, s_2+u, t+ry) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} e^{-ik\omega_0(s_2-s_1)} ds_1 ds_2 + O(N^{-2}).$$

У **четвертому розділі** розглянуто методи виявлення періодичної нестационарності сигналів у частотній області. Розглянуто властивості спектральних характеристик ПНВС для встановлення частотної області, в якій відбуваються періодичні зміни миттєвої спектральної густини сигналу. Показано, що миттєва спектральна густина ПНВС є комплекснозначною величиною а частотний діапазон, в якому миттєва спектральна густина ПНВС змінюється за часом, визначається косинусними перетвореннями від косинусних і синусних кореляційних компонентів. Сформовано компонентні статистики для визначення частотного діапазону та частоти таких змін (базової частоти ПНВС). Проаналізовано збіжність компонентних статистик, отримано вирази для величин зміщення та дисперсії оцінок. Досліджено властивості оцінок базової частоти ПНВС, отримано залежності для зміщення та дисперсії компонентних оцінок базової частоти. Показано, що зміщення оцінки, яка знаходиться за статистикою косинусної складової, залежить від нульового і косинусних кореляційних компонентів,

а за статистикою синусної складової – від синусних кореляційних компонентів. Показано, що дисперсії оцінок базової частоти ПНВС є оберненопропорційними до квадрату номера вибраної для оцінювання гармоніки, а також квадрату математичного сподівання того функціоналу, за екстремальними значеннями якого знаходиться оцінка частоти. Виконано аналіз дискретних компонентних оцінок базової частоти ПНВС. Показано, що дискретизація за затримкою у загальному випадку приводить до ефекту накладання. Сформульовано вимоги до частоти дискретизації для відсутності такого накладання. Отримано формули для зміщення та дисперсії дискретних оцінок базової частоти за умови відсутності накладання.

Важливою задачею при встановленні типу дефектів елементів і вузлів механічних систем є встановлення тої частотної області, в якій відбуваються періодичні зміни миттєвої спектральної густини $f(\omega, t)$. Такі зміни, визначаються спектральними компонентами $f_k(\omega)$, які в свою чергу, є суперпозицією зміщених по частоті на $l\omega_0$, $l \in \mathbb{Z}$ спектральних густин стаціонарних випадкових процесів $\xi_k(t)$, які модулюють базисні гармоніки ПНВС представлені у вигляді:

$$f_k(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{l-k,l}(\omega - l\omega_0).$$

Миттєва спектральна густина ПНВС $f(\omega, t)$ є комплекснозначною:
 $f(\omega, t) = \operatorname{Re} f(\omega, t) - i \operatorname{Im} f(\omega, t)$.

Для розкладів у ряди Фур'є для дійсної та уявної частини змінної у часі компоненти спектральної густини маємо:

$$\operatorname{Re} f(\omega, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_0(u) \cos \omega u du + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^c(u) \cos \omega u du \right] \cos k\omega_0 t + \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^s(u) \cos \omega u du \right] \sin k\omega_0 t \right],$$

$$\operatorname{Im} f(\omega, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[\cos k\omega_0 t \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^c(u) \sin \omega u du \right] + \sin k\omega_0 t \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^s(u) \sin \omega u du \right] \right].$$

Нульовий спектральний компонент і дійсна та уявна частини вищих компонентів визначаються співвідношеннями:

$$f_0(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_0(u) \cos \omega u du,$$

$$\operatorname{Re} f_k(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B_k^c(u) \cos \omega u - B_k^s(u) \sin \omega u] du,$$

$$\operatorname{Im} f_k(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B_k^c(u) \sin \omega u + B_k^s(u) \cos \omega u] du.$$

$$\operatorname{Re} f(\omega, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_0(u) \cos \omega u du + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[[\operatorname{Re} f_k(\omega) + \operatorname{Re} f_k(-\omega)] \cos k\omega_0 t + [\operatorname{Im} f_k(\omega) + \operatorname{Im} f_k(-\omega)] \sin k\omega_0 t \right],$$

$$\operatorname{Im} f(\omega, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[[\operatorname{Im} f_k(\omega) - \operatorname{Im} f_k(-\omega)] \cos k\omega_0 t + [\operatorname{Re} f_k(-\omega) - \operatorname{Re} f_k(\omega)] \sin k\omega_0 t \right].$$

Частотний діапазон, в якому миттєва спектральна густина ПНВС змінюється за часом, визначається косинусними перетвореннями від косинусних і синусних кореляційних компонентів.

Для визначення частотного діапазону, в якому відбуваються часові зміни, та періоду таких змін (базової частоти ПНВС), формуємо компонентні статистики, які мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \hat{f}_k^c(\omega, \omega_2) \\ \hat{f}_k^s(\omega, \omega_2) \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \begin{cases} \hat{B}_k^c(u, \omega_2) \\ \hat{B}_k^s(u, \omega_2) \end{cases} \cos \omega u du,$$

де

$$\begin{cases} \hat{B}_k^c(u, \omega_2) \\ \hat{B}_k^s(u, \omega_2) \end{cases} = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) \xi(t+u) \begin{cases} \cos k \omega_2 t \\ \sin k \omega_2 t \end{cases} dt,$$

а $k(u)$ - прямокутне кореляційне вікно: $k(u) \neq 0$ при $u \in [-u_m, u_m]$, $k(u) = 0$ при $u \notin [-u_m, u_m]$. Величина ω_2 є невідомою, при цьому $\omega_2 = \frac{2\pi}{\tau}$, де τ - пробний період.

У роботі показано, що дискретизація за зсувом в загальному випадку приводить до накладання, і на значення спектральних компонентів на даній частоті накладаються ті значення, які зсунуті відносно неї на частоти $n \frac{2\pi}{\Delta u}$, $n \in Z$. Інтервал дискретизації за зсувом потрібно вибирати так, щоб уникнути накладання. Якщо ненульові значення спектральних компонентів зосереджені в смузі $[-\omega_m, \omega_m]$, то накладання буде відсутнє, якщо $\Delta u < \frac{\pi}{\omega_m}$.

Зміщення оцінок визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{\omega}_2^c] &= - \frac{\sum_{n \in Z} k(n\Delta u) \left[\sum_{m=-K}^K mb(mh, n\Delta u) \sin k \omega_0 mh \right] \cos \omega n \Delta u}{kh \sum_{n \in Z} k(n\Delta u) \left[\sum_{m=-K}^K m^2 b(mh, n\Delta u) \cos k \omega_0 mh \right] \cos \omega n \Delta u}, \\ \varepsilon[\hat{\omega}_2^s] &= - \frac{\sum_{n \in Z} k(n\Delta u) \left[\sum_{m=-K}^K mb(mh, n\Delta u) \cos k \omega_0 mh \right] \cos \omega n \Delta u}{kh \sum_{n \in Z} k(n\Delta u) \left[\sum_{m=-K}^K m^2 b(mh, n\Delta u) \sin k \omega_0 mh \right] \cos \omega n \Delta u}. \end{aligned}$$

Аналіз дисперсій оцінок частоти, (обмежений як і в неперервному випадку, тільки першим наближенням) дозволив отримати залежності для дисперсій дискретних статистик $D[\hat{\omega}_2^c]$ і $D[\hat{\omega}_2^s]$, які наведені в дисертаційній роботі.

У **п'ятому розділі** розроблена модель ПНВС на основі перетворення Гільберта та аналітичного сигналу. Проведено дослідження кореляційних та спектральних властивостей перетворення Гільберта гармонійного коливання, що є амплітудно-фазомодульоване ширококутовим стаціонарним випадковим процесом. Показано що у цьому випадку аналітичний сигнал є ПНВС. Показано, що для ПНВС з високочастотними модульованими гармоніками кореляційна структура перетворення Гільберта сигналу не змінюється порівняно з вихідним сигналом. Ця особливість сигналу була встановлена як для випадків моно- та багатоконпонентної ПНВС, так і для ширококутової, вузькосмугової, амплітудної та амплітудно-фазової модуляції, тобто аналітичний сигнал є ПНВС у всіх випадках. Квадрат модуля, тобто сума квадратів сигналу та його перетворення Гільберта, є чисто випадковим сигналом, а отже методи гармонійного аналізу детермінованого сигналу недоцільно використовувати для пошуку

періодичностей у такому ‘квадраті огинаючої’, оскільки результати такого аналізу стосовно чисто випадкового процесу не є слухними. Дисперсія аналітичного сигналу дорівнює подвоєній дисперсії вихідного сигналу, тому його аналіз не може дати нових результатів у порівнянні зі звичайним аналізом дисперсії необробленого сигналу.

Розглянуто процес смугової фільтрації високочастотного амплітудно-фазомодульованого сигналу, і встановлено особливості залежності результатів його обробки від параметрів фільтра. Встановлено, що параметри фільтра ПНВС слід вибирати виходячи з величини взаємних кореляцій модуляцій сигналів а не їх потужності. Виконано аналіз вузькосмугово модульованого багатокomпонентного ПНВС, що представлений у вигляді суперпозиції стаціонарної та взаємно періодично нестаціонарної високочастотної складових і розглянуто властивості перетворення Гільберта сигналу та аналітичного сигналу, а також запропоновано методи розділення вузькосмугових високочастотних квадратур. У разі вузькосмугової модуляції сигнал може бути представлений суперпозицією двох компонентів за Райсом, кожна з яких є стаціонарним випадковим процесом, однак ці компоненти є взаємно ПНВС. Взаємна кореляція цих компонентів призводять до періодичної нестаціонарності відповідного аналітичного сигналу. Коефіцієнти Фур'є кореляційних функцій компонентів визначаються взаємними кореляціями складових квадратур. Структура взаємної кореляції квадратур може мати специфічні особливості, характерні для різних джерел, які генерують ПНВС. Тобто взаємну кореляцію квадратур можна використовувати для розділення та ідентифікації джерел сигналу, наприклад, для визначення типу та локалізації дефекту механізму. За допомогою перетворення Гільберта можна виділити квадратури компонентів та оцінити їх авто- та взаємну кореляційну функції на основі отриманих часових рядів. За допомогою такого підходу також можуть досліджуватися і квадратури високочастотних коливань, які модулюють несучі гармоніки ПНВС. Для опису особливостей джерел, що генерують ПНВС корисно використовувати карти кореляцій. Проведено верифікацію отриманих теоретичних результатів шляхом обробки симульованих часових рядів.

Вібраційний сигнал можна описати суперпозицією амплітудних і фазово-модульованих несучих гармонік з багатьма частотами:

$$\xi(t) = \sum_{k=-L}^L \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} = \xi_0(t) + \sum_{k=1}^L [\xi_k^c(t) \cos k\omega_0 t + \xi_k^s(t) \sin k\omega_0 t]$$

де $\xi_k(t) = \frac{1}{2} [\xi_k^c(t) - i\xi_k^s(t)]$ є взаємно стаціонарними випадковими процесами. Оскільки властивості перетворення Гільберта від сигналу залежать від смуги частот, в якій зосереджені спектральні густини потужностей $\xi_k(t)$, доцільно розглянути окремо низько- та високочастотні модуляції.

Якщо всі модулюючі процеси у представленні пропорційні тому самому стаціонарному процесу $\mu(t)$ тобто $\xi_k(t) = c_k \mu(t)$ де c_k деякі комплексні числа, ми отримуємо мультиплікативну модель модуляції:

$$\xi(t) = \mu(t) \sum_{k \in Z} c_k e^{ik\omega_0 t} = \mu(t) s(t) \quad (2)$$

де

$$s(t) = \sum_{k \in Z} c_k e^{ik\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k \in Z} a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k \in Z} b_k \sin k\omega_0 t \quad (3)$$

і $c_0 = a_0$, $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$. Функція математичного сподівання $m_\xi(t) = E\xi(t)$ і

кореляційна функція $b_\xi(t, u) = E \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u)$ ($\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t)$) від (2) мають вигляд:

$$m_\xi(t) = m_\mu s(t), \quad b_\xi(t, u) = R_\mu(u) s(t) s(t+u),$$

де $m_\mu = E\mu(t)$, $R_\mu(u) = E\overset{\circ}{\mu}(t)\overset{\circ}{\mu}(t+u)$, $\overset{\circ}{\mu}(t) = \mu(t) - m_\mu$. Допустимо, що $m_\mu = 0$ і ряд (3) є скінченним з максимальним числом гармонік рівним L . Тоді:

$$s(t)s(t+u) = \sum_{k=-2L}^{2L} r_k(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad r_k(u) = \sum_{l \in M} c_l \bar{c}_{l-k} e^{il\omega_0 u},$$

де “ $\bar{}$ ” є знак спряження, а множина $M = \{-L, \dots, k+L\}$ для $k \leq 0$ і $M = \{k-L, \dots, L\}$ для $k > 0$. Для кореляційної функції сигналу (2) маємо:

$$b_\xi(t, u) = \sum_{k=-2L}^{2L} B_k^{(\xi)}(u) e^{ik\omega_0 t},$$

де k -та кореляційна компонента рівна

$$B_k^{(\xi)}(u) = r_k(u) R_\mu(u).$$

Спектральні компоненти

$$f_k^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k^{(\xi)}(u) e^{-i\omega\tau} du$$

визначаються формулою

$$f_k^{(\xi)}(\omega) = \sum_{l \in M} c_l \bar{c}_{l-k} f_\mu(\omega - l\omega_0),$$

де $f_\mu(\omega)$ є спектральна густина потужності модулюючого процесу:

$$f_\mu(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\mu(u) e^{-i\omega u} du.$$

Нульові кореляційний та спектральний компоненти мають вигляд:

$$B_0^{(\xi)}(u) = R_\mu(u) \sum_{l=-L}^L |c_l|^2 e^{il\omega_0 u} = R_\mu(u) \left[a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (a_l^2 + b_l^2) \cos l\omega_0 u \right],$$

$$f_0^{(\xi)}(\omega) = \sum_{l=-L}^L |c_l|^2 f_\mu(\omega - l\omega_0) = a_0^2 f_\mu(\omega) + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^L (a_l^2 + b_l^2) [f_\mu(\omega - l\omega_0) + f_\mu(\omega + l\omega_0)].$$

У розділі проаналізовано ПНВС-модель з широкосмуговою високочастотною модуляцією несучої. Припустимо, що одностороння спектральна густина потужності модулюючої $\mu(t)$ зосереджена в інтервалі $[\nu_0 - \omega_m, \nu_0 + \omega_m]$ і $[\nu_0 - \omega_m > L\omega_0]$. Це означає, що спектр модулюючого процесу $\mu(t)$, перекривається з спектром періодичної несучої.

Спектр сигналу зосереджений в інтервалі $[\nu_0 - \omega_m - L\omega_0, \nu_0 + \omega_m + L\omega_0]$ при цьому $[\nu_0 - \omega_m, \nu_0 + \omega_m]$ – смуга частот модулюючого сигналу $\mu(t)$. Спектральні властивості сигналу (2) залежать від швидкості заникання кореляційної функції модулюючого процесу $\mu(t)$. Спектральна густина $f_\mu(\omega)$ є вузькосмугою, оскільки вона повільно згасає, і в цьому випадку $f_0^{(\xi)}(\omega)$ має гребінчасту форму з піками в точках $k\omega_0$.

З урахуванням теореми Бедросяна для перетворення Гільберта сигналу маємо:

$$\zeta(t) = H\{\xi(t)\} = s(t) \tilde{\mu}(t),$$

де $\tilde{\mu}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \mu(\tau) d\tau$ і $h(t) = (\pi t)^{-1}$. З урахуванням формули зворотного

перетворення Гільберта $\mu(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \tilde{\mu}(\tau) d\tau$ ми отримаємо Гільберт пари:

$$R_{\mu}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau)R_{\bar{\mu}\mu}(\tau)d\tau, \quad R_{\bar{\mu}\mu}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau)R_{\mu}(\tau)d\tau,$$

$$R_{\bar{\mu}}(\tau) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau)R_{\mu\bar{\mu}}(\tau)d\tau, \quad R_{\mu\bar{\mu}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau)R_{\bar{\mu}}(\tau)d\tau,$$

де $R_{\bar{\mu}}(u) = E\tilde{\mu}(t)\tilde{\mu}(t+u)$, $R_{\bar{\mu}\mu}(u) = E\tilde{\mu}(t)\mu(t+u)$ і $R_{\mu\bar{\mu}}(u) = E\mu(t)\tilde{\mu}(t+u)$.

Звідси спектральна густина потужності модулюючого процесу $f_{\mu}(\omega)$, спектральна густина потужності перетворення Гільберта

$$f_{\bar{\mu}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\bar{\mu}}(u)e^{-i\omega u} du$$

та їх взаємні спектральні густини

$$f_{\bar{\mu}\mu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\bar{\mu}\mu}(u)e^{-i\omega u} du, \quad f_{\mu\bar{\mu}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu\bar{\mu}}(u)e^{-i\omega u} du,$$

пов'язані наступними співвідношеннями:

$$f_{\mu}(\omega) = H(\omega)f_{\bar{\mu}\mu}(\omega), \quad f_{\bar{\mu}\mu}(\omega) = -H(\omega)f_{\mu}(\omega),$$

$$f_{\bar{\mu}}(\omega) = -H(\omega)f_{\mu\bar{\mu}}(\omega), \quad f_{\mu\bar{\mu}}(\omega) = H(\omega)f_{\bar{\mu}}(\omega),$$

де $H(\omega) = -i$ для $\omega > 0$ і $H(\omega) = i$ для $\omega < 0$.

Вирази для автокореляційної функції перетворення Гільберта і взаємокореляційних функцій:

$$b_{\eta}(t,u) = \sum_{k=-2L}^{2L} B_k^{(\eta)}(u)e^{ik\omega_0 t}, \quad b_{\xi\eta}(t,u) = \sum_{k=-2L}^{2L} B_k^{(\xi\eta)}(u)e^{ik\omega_0 t}, \quad b_{\eta\xi}(t,u) = \sum_{k=-2L}^{2L} B_k^{(\eta\xi)}(u)e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$B_k^{(\eta)}(u) = R_{\bar{\mu}}(u)r_k(u), \quad B_k^{(\xi\eta)}(u) = R_{\mu\bar{\mu}}(u)r_k(u), \quad B_k^{(\eta\xi)}(u) = R_{\bar{\mu}\mu}(u)r_k(u).$$

Доведено низку теорем.

Теорема. Кореляційна функція сигналу та його перетворення Гільберта однакові, а їхні взаємокореляційні функції відрізняються лише знаком, при цьому взаємокореляційні компоненти визначаються за формулою:

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = -B_k^{(\eta\xi)}(u) = \left[2 \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu}(\omega) \sin \omega u d\omega \right] r_k(u).$$

Наслідок. Нульова кореляційна складова задовольняє рівність:

$$B_0^{\xi\eta}(u) = -B_0^{\eta\xi}(u) = B_0^{\eta\xi}(-u)$$

і визначається виразом

$$B_0^{\xi\eta}(u) = 2 \left[\sum_{l=-L}^L |c_l|^2 \cos l\omega_0 u \right] \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu}(\omega) \sin \omega u d\omega.$$

Висновок. Аналітичний сигнал є комплексозначним ПКВП і його кореляційна функція визначається рядом Фур'є

$$b_{\zeta}(t,u) = \sum_{k=-2L}^{2L} B_k^{(\zeta)}(u)e^{ik\omega_0 t},$$

$$B_k^{(\zeta)}(u) = 2 \left[B_k^{(\xi)}(u) + iB_k^{(\xi\eta)}(u) \right].$$

Оскільки $B_k^{(\xi\eta)}(0) = 0$, то дисперсія аналітичного сигналу дорівнює сумі дисперсій сигналу (2) та його перетворення Гільберта:

$$b_{\zeta}(t,0) = E\xi^2(t) + E\eta^2(t) = 2b_{\xi}(t,0) = 2R_{\mu}(0)s^2(t).$$

Функція $|\zeta(t)| = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}$ в літературі називається сигналом огинаючої, а $|\zeta(t)|^2$ – квадратом огинаючої. Ці величини не є детермінованими функціями, вони є ПКВП. Математичне сподівання квадрата огинаючої дорівнює подвоєній дисперсії сигналу, амплітуда гармонік якого визначається амплітудою квадрата функції, що описує низькочастотну несучу. Це означає, що амплітуда кожної з гармонік дисперсії визначається добутками всіх несучих гармонік, номери яких зміщені на величину k . Періодична у часі дисперсія присутня на фоні стаціонарного процесу з потужністю $B_0(0) = \sum_{l=-L}^L |c_l|^2 R_\mu(0)$, що пропорційна усередненій за часом потужності $s(t)$.

Розглянуто властивості ПНВС після смугової фільтрації. Припустимо, що “прямокутна” функція передачі фільтра задана наступним чином:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2], \\ 0 & \text{для інших } \omega. \end{cases}$$

Теорема. Якщо $[\omega_1, \omega_2] \in [v_0 - \omega_m - L\omega_0, v_0 + \omega_m + L\omega_0]$ де ω_1 і ω_2 – деякі значення циклічних частот, то смугова фільтрація амплітудно-модульованого сигналу з передатною функцією виду призводить до зменшення амплітуд окремих гармонік його дисперсії та потужності стаціонарного фону. Ці величини відповідно визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} |B_k^{(\xi_f)}(0)| &= \sum_{l \in M} \bar{c}_{l-k} c_l \left[\int_{\omega_1+k\omega_0}^{\omega_2} [f_\mu(\omega - l\omega_0) + f_\mu(\omega + l\omega_0)] d\omega \right], \\ B_0^{(\xi_f)}(0) &= \sum_{l=-L}^L |c_l|^2 \left[\int_{\omega_1}^{\omega_2} [f_\mu(\omega - l\omega_0) + f_\mu(\omega + l\omega_0)] d\omega \right]. \end{aligned}$$

Відношення $|B_k^{(\xi_f)}(0)| / B_0^{(\xi_f)}(0)$ зменшується з ростом номера гармоніки k і $|B_k^{(\xi_f)}(0)| = 0$ для $\omega_1 + k\omega_0 \geq \omega_2$.

Сума квадратів сигналу та його перетворення Гільберта є сумою двох однакових ПКВП, і функція його математичного сподівання рівна подвоєній дисперсії вхідного сигналу. Ця сума не є квадратом огинаючої у його звичайному розумінні. Аналіз цієї величини не дає жодних нових результатів у порівнянні з аналізом вихідного сигналу.

У розділі проаналізовано модель ПНВС з вузькосмуговою високочастотною модуляцією несучої. Припустимо, що $\omega_m < \omega_0/2$ і представимо модулюючий процес $\mu(t)$ у вигляді співвідношення Райса:

$$\mu(t) = \mu_c(t) \cos v_0 t + \mu_s(t) \sin v_0 t.$$

Якщо автокореляційні функції квадратур $R_\mu^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{\mu}_{c,s}(t+u) \overset{\circ}{\mu}_{c,s}(t)$, $\overset{\circ}{\mu}_{c,s}(t) = \mu_{c,s}(t) - m_{c,s}$, $m_{c,s} = E \mu_{c,s}(t)$, рівні $R_\mu^c(u) = R_\mu^s(u)$, а функція взаємної кореляції $R_\mu^{cs}(u) = E \overset{\circ}{\mu}_c(t+u) \overset{\circ}{\mu}_s(t)$ є непарною функцією $R_\mu^{cs}(-u) = -R_\mu^{cs}(u)$, то $\mu(t)$ є стаціонарним випадковим процесом і його кореляційна функція дорівнює:

$$R_\mu(u) = R_\mu^c(u) \cos v_0 u + R_\mu^{cs}(u) \sin v_0 u.$$

Кореляційна функція перетворення Гільберта має форму:

$$\tilde{\mu}(t) = \mu_c(t) \sin v_0 t - \mu_s(t) \cos v_0 t.$$

Спектральні густини потужності визначаються виразом:

$$f_{\mu}(\omega) = f_{\bar{\mu}}(\omega) = \frac{1}{2} [f_c(\omega - \nu_0) + f_c(\omega + \nu_0) - f_{cs}(\omega - \nu_0) + f_{cs}(\omega + \nu_0)],$$

Залежності функцій спектральної густини від частоти мають гребінчасту форму з піками в точках $\omega = \nu_0 \pm l\omega_0$. Величини нульових спектральних компонент однакові в точках $\omega = \nu_0 + l\omega_0$ і $\omega = \nu_0 - l\omega_0$. Кожна компонента, може бути виділена за допомогою фільтра з відповідною прямокутною передаточною функцією, тобто:

$$H_l(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in \left[-\nu_0 \pm l\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, -\nu_0 \pm l\omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \right] \cup \left[\nu_0 \pm l\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, \nu_0 \pm l\omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \right], \\ 0 \text{ for other } \omega. \end{cases}$$

Представивши сигнал у вигляді суперпозиції таких двох відфільтрованих компонентів:

$$\xi(t) = a_0 [\mu_c(t) \cos \nu_0 t + \mu_s(t) \sin \nu_0 t] + \sum_{l=1}^L [\xi_l^+(t) + \xi_l^-(t)].$$

Тут

$$\xi_l^+(t) = p_l^c(t) \cos(\nu_0 + l\omega_0)t + p_l^s(t) \sin(\nu_0 + l\omega_0)t,$$

$$\xi_l^-(t) = q_l^c(t) \cos(\nu_0 - l\omega_0)t + q_l^s(t) \sin(\nu_0 - l\omega_0)t,$$

$$p_l^c(t) = \frac{1}{2} [a_l \mu_c(t) - b_l \mu_s(t)], \quad p_l^s(t) = \frac{1}{2} [a_l \mu_s(t) + b_l \mu_c(t)],$$

$$q_l^c(t) = \frac{1}{2} [a_l \mu_c(t) + b_l \mu_s(t)], \quad q_l^s(t) = \frac{1}{2} [a_l \mu_s(t) - b_l \mu_c(t)].$$

Теорема. Компоненти є стаціонарними випадковими процесами, автокореляційні функції яких визначаються за формулами:

$$R_{\xi_l^+}(u) = \frac{1}{4} (a_l^2 + b_l^2) [R_{\mu}^c(u) \cos(\nu_0 + l\omega_0)u + R_{\mu}^{cs}(u) \sin(\nu_0 + l\omega_0)u],$$

$$R_{\xi_l^-}(u) = \frac{1}{4} (a_l^2 + b_l^2) [R_{\mu}^c(u) \cos(\nu_0 - l\omega_0)u + R_{\mu}^{cs}(u) \sin(\nu_0 - l\omega_0)u].$$

Амплітуди гармонік кореляційної функції сигналу пропорційні до кореляційної функції вузькосмугового процесу. Квадратури цього процесу можна розділити за допомогою перетворення Гільберта:

$$\eta_l^+(t) = H \{ \xi_l^+(t) \} = p_l^c(t) \sin(\nu_0 + l\omega_0)t - p_l^s(t) \cos(\nu_0 + l\omega_0)t,$$

$$\eta_l^-(t) = q_l^c(t) \sin(\nu_0 - l\omega_0)t - q_l^s(t) \cos(\nu_0 - l\omega_0)t.$$

Отже

$$\mu_c(t) = \frac{1}{a_l} \left[\xi_l^+(t) \cos(\nu_0 + l\omega_0)t + \eta_l^+(t) \sin(\nu_0 + l\omega_0)t + \xi_l^-(t) \cos(\nu_0 - l\omega_0)t + \eta_l^-(t) \sin(\nu_0 - l\omega_0)t \right],$$

$$\mu_s(t) = \frac{1}{b_l} \left[\xi_l^-(t) \cos(\nu_0 - l\omega_0)t + \eta_l^-(t) \sin(\nu_0 - l\omega_0)t - \xi_l^+(t) \cos(\nu_0 + l\omega_0)t - \eta_l^+(t) \sin(\nu_0 + l\omega_0)t \right].$$

Отримані співвідношення використовуються з метою виділення квадратур для подальшого аналізу їх кореляційних і спектральних властивостей.

У розділі проаналізовано аналітичний сигнал для вузькосмугового випадку модуляції сигналу:

$$\zeta(t) = [\mu_c(t) - i\mu_s(t)] e^{i\nu_0 t} s(t),$$

“огинача”

$$|\zeta(t)| = \sqrt{\mu_c^2(t) + \mu_s^2(t)} s(t)$$

і квадрат “огиначої” є ПКВП. Функція математичного сподівання квадрату “огиначої”:

$$E\left[|\zeta(t)|^2\right] = \left[E\mu_c^2(t) + E\mu_s^2(t)\right] s^2(t) = 2R_\mu^c(0) s^2(t),$$

містить $2L$ гармонік з частотами $k\omega_0$, $k = \overline{1, 2L}$, амплітуди яких визначаються сумою добутків амплітуд гармонік $s(t)$, номери яких відрізняються на k . Зі збільшенням числа k кількість доданків у сумі зменшується з $2L$ до 1.

У розділі проаналізовано модель ПНВС з високочастотною амплітудно-фазовою модуляцією несучої. Для цього розглянуто квадратурну модель виду:

$$\xi(t) = \xi_c(t) \cos \omega_0 t + \xi_s(t) \sin \omega_0 t,$$

де $\xi_c(t)$ і $\xi_s(t)$ – стаціонарні випадкові процеси з нульовим математичним сподіванням і автокореляційними функціями $R_c^{(\xi)}(u) = E\xi_c(t)\xi_c(t+u)$, $R_s^{(\xi)}(u) = E\xi_s(t)\xi_s(t+u)$ і взаємкореляційною функцією $R_{cs}^{(\xi)}(u) = E\xi_c(t)\xi_s(t+u)$. Виходячи з квадратурної моделі маємо:

$$b_\xi(t, u) = B_0^{(\xi)}(u) + C_2^{(\xi)}(u) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi)}(u) \sin 2\omega_0 t,$$

де

$$B_0^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} \left[R_c^{(\xi)}(u) + R_s^{(\xi)}(u) \right] \cos \omega_0 u + \tilde{R}_{cs}^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u,$$

$$C_2^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} \left[R_c^{(\xi)}(u) - R_s^{(\xi)}(u) \right] \cos \omega_0 u + \tilde{R}_{cs}^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u,$$

$$S_2^{(\xi)}(u) = \tilde{R}_{cs}^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u + \frac{1}{2} \left[R_s^{(\xi)}(u) - R_c^{(\xi)}(u) \right] \sin \omega_0 u,$$

а функції $\tilde{R}_{cs}^{(\xi)}(u)$ і $\tilde{\tilde{R}}_{cs}^{(\xi)}(u)$ є парною і непарною частинами функції $R_{cs}^{(\xi)}(u)$.

Припустимо, що спектри квадратур

$$f_c^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty R_c^{(\xi)} \cos \omega u du, \quad f_s^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty R_s^{(\xi)} \sin \omega u du.$$

лежать в інтервалі $[v_0 - \omega_m, v_0 + \omega_m]$ і $v_0 - \omega_m > \omega_0$. Використовуючи теорему Бедрояна для перетворення Гільберта від квадратурної моделі сигналу, маємо:

$$\eta(t) = H\{\xi(t)\} = \eta_c(t) \cos \omega_0 t + \eta_s(t) \sin \omega_0 t,$$

де

$$\eta_c(t) = \int_{-\infty}^\infty h(t-\tau) \xi_c(\tau) d\tau, \quad \eta_s(t) = \int_{-\infty}^\infty h(t-\tau) \xi_s(\tau) d\tau.$$

Беручи це до уваги і враховуючи, що

$$\xi_c(t) = - \int_{-\infty}^\infty h(t-\tau) \eta_c(\tau) d\tau,$$

$$\xi_s(t) = - \int_{-\infty}^\infty h(t-\tau) \eta_s(\tau) d\tau,$$

отримуємо вирази для кореляційних функцій $R_{c,s}^{(\eta)}(u) = E\eta_{c,s}(t)\eta_{c,s}(t+u)$ і $R_{c,s}^{(\xi\eta)}(u) = E\xi_{c,s}(t)\eta_{c,s}(t+u)$:

$$R_{c,s}^{(\xi)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{c,s}^{(\eta\xi)}(\tau) d\tau, \quad R_{c,s}^{(\eta\xi)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{c,s}^{(\xi)}(\tau) d\tau,$$

$$R_{c,s}^{(\eta)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{c,s}^{(\xi\eta)}(\tau) d\tau, \quad R_{c,s}^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau) R_{c,s}^{(\eta)}(\tau) d\tau.$$

З цих співвідношень випливає, що кореляційні функції $R_{c,s}^{(\xi)}(u)$ з $R_{c,s}^{(\eta\xi)}(u)$, і $R_{c,s}^{(\xi\eta)}(u)$ з $R_{c,s}^{(\eta)}(u)$ є парами перетворення Гільберта.

Теорема. Авто- та взаємкореляційні функції квадратур сигналу і перетворення Гільберта його квадратур однакові:

$$R_c^{(\eta)}(u) = R_c^{(\xi)}(u), \quad R_s^{(\eta)}(u) = R_s^{(\xi)}(u), \quad R_{cs}^{(\eta)}(u) = R_{cs}^{(\xi)}(u)$$

їх взаємкореляційні функції відрізняються лише знаком:

$$R_c^{(\xi\eta)}(u) = -R_c^{(\eta\xi)}(u), \quad R_s^{(\xi\eta)}(u) = -R_s^{(\eta\xi)}(u),$$

$$R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) = -R_{cs}^{(\eta\xi)}(u), \quad R_{sc}^{(\xi\eta)}(u) = -R_{sc}^{(\eta\xi)}(u)$$

і визначаються формулами:

$$R_c^{(\xi\eta)}(u) = 2 \int_0^{\infty} f_c^{(\xi)}(\omega) \sin \omega u d\omega, \quad R_s^{(\xi\eta)}(u) = 2 \int_0^{\infty} f_s^{(\xi)}(\omega) \sin \omega u d\omega,$$

$$R_{cs}^{(\xi\eta)}(u) = 2 \int_0^{\infty} \left[\tilde{f}_{cs}^{(\xi)}(\omega) \sin \omega u - \tilde{f}_{cs}^{(\xi)}(\omega) \cos \omega u \right] d\omega,$$

де

$$\tilde{f}_{cs}^{(\eta)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{R}_{cs}^{(\eta)}(u) \cos \omega u du, \quad \tilde{f}_{cs}^{(\eta)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{R}_{cs}^{(\eta)}(u) \sin \omega u du.$$

Теорема Сигнал і його перетворення Гільберта є взаємно ПНВС, їх взаємкореляційні функції $b_{\xi\eta}(t,u) = E\xi(t)\eta(t+u)$ і $b_{\eta\xi}(t,u) = E\eta(t)\xi(t+u)$ відрізняються лише знаком і мають вигляд:

$$b_{\xi\eta}(t,u) = -b_{\eta\xi}(t,u) = \sum_{k=0,\pm 2} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega t},$$

де

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[R_c^{(\xi\eta)}(u) + R_s^{(\xi\eta)}(u) \right] \cos \omega_0 u + \tilde{R}_{cs}^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega_0 u,$$

$$B_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{4} \left[R_c^{(\xi\eta)}(u) - R_s^{(\xi\eta)}(u) - 2i \tilde{R}_{cs}^{(\xi\eta)}(u) \right] e^{i\omega_2 u},$$

при цьому $\tilde{R}_{cs}^{(\xi\eta)}(u)$ і $\tilde{R}_{cs}^{(\xi\eta)}(u)$ є парними і непарними частинами функції взаємної кореляції $R_{cs}^{(\xi\eta)}(u)$.

Теорема. Аналітичний сигнал $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$ є ПНВС, кореляційна функція якого має вигляд:

$$b_{\zeta}(t,u) = \sum_{k=0,\pm 2} B_k^{(\zeta)}(u) e^{ik\omega t},$$

а його кореляційні компоненти визначаються за формулами:

$$B_0^{(\zeta)}(u) = \left[2 \int_0^{\infty} \left[f_c^{(\xi)}(\omega) + f_s^{(\xi)}(\omega) \right] e^{i\omega u} d\omega \right] \cos \omega_0 u - 4i \left[\int_0^{\infty} \tilde{f}_{cs}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega \right] \sin \omega_0 u,$$

$$B_2^{(\zeta)}(u) = \left[\int_0^{\infty} \left[f_c^{(\xi)}(\omega) - f_s^{(\xi)}(\omega) \right] e^{i\omega u} d\omega - 2i \int_0^{\infty} \tilde{f}_{cs}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega \right] e^{i\omega_2 u}.$$

Наслідок. Якщо гармонійна несуча є амплітудно- і фазово- модульована високою частотою, то сума квадратів сигналу та його перетворення Гільберта є ПНВС, математичне сподівання якого дорівнює подвійній дисперсії сигналу, тобто

$$b_{\zeta}(t, 0) = B_0^{(\zeta)}(0) + C_2^{(\zeta)}(0) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\zeta)}(0) \sin 2\omega_0 t,$$

де

$$B_0^{(\zeta)}(0) = 2 \int_0^{\infty} [f_c(\omega) + f_s(\omega)] d\omega,$$

$$C_2^{(\zeta)}(0) = 2 \int_0^{\infty} [f_c(\omega) - f_s(\omega)] d\omega, \quad S_2^{(\zeta)}(0) = 4 \int_0^{\infty} \tilde{f}_{cs}(\omega) d\omega.$$

Теорема. Компоненти сигналу є стаціонарними випадковими процесами, і їх автокореляційні функції визначаються за формулами:

$$R_{\xi^+}(u) = \frac{1}{4} \left[[r_p^c(u) + r_q^c(u) - 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u)] \cos(v_0 + \omega_0)u + [r_p^{cs}(u) + r_q^{cs}(u) + 2\tilde{r}_{pq}^c(u)] \sin(v_0 + \omega_0)u \right],$$

$$R_{\xi^-}(u) = \frac{1}{4} \left[[r_p^c(u) + r_q^s(u) + 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u)] \cos(v_0 - \omega_0)u + [r_p^{cs}(u) + r_q^{cs}(u) - 2\tilde{r}_{pq}^c(u)] \sin(v_0 - \omega_0)u \right],$$

а сума їх величин дорівнює нульовій кореляційній компоненті сигналу (5.3.1).

Теорема. Стаціонарні компоненти сигналу є взаємно ПНВС, функції їх взаємної кореляції задаються рівняннями:

$$R_{\xi^+ \xi^-}(t, u) = \frac{1}{4} \left[[r_p^c(u) - r_q^s(u) + 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u)] \cos(2\omega_0 t - (v_0 - \omega_0)u) - [r_p^{cs}(u) - r_q^{cs}(u) - 2\tilde{r}_{pq}^c(u)] \sin(2\omega_0 t - (v_0 - \omega_0)u) \right].$$

$$R_{\xi^- \xi^+}(t, u) = \frac{1}{4} \left[[r_p^c(u) - r_q^s(u) - 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u)] \cos(2\omega_0 t + (v_0 + \omega_0)u) + [r_p^{cs}(u) - r_q^{cs}(u) + 2\tilde{r}_{pq}^c(u)] \sin(2\omega_0 t + (v_0 + \omega_0)u) \right],$$

Перетворення Гільберта сигналу $\xi(t) = \xi_c(t) \cos \omega_0 t + \xi_s(t) \sin \omega_0 t$ для вузькосмугового високочастотного випадку дорівнює:

$$\eta(t) = [p_c(t) \sin v_0 t - p_s(t) \cos v_0 t] \cos \omega_0 t + [q_c(t) \sin v_0 t - q_s(t) \cos v_0 t] \sin \omega_0 t.$$

Представимо цей вираз як суму двох компонентів:

$$\eta(t) = \eta^+(t) + \eta^-(t),$$

де

$$\eta^+(t) = H \{ \xi^+(t) \} = \mu_c(t) \sin(v_0 + \omega_0)t - \mu_s(t) \cos(v_0 + \omega_0)t,$$

$$\eta^-(t) = H \{ \xi^-(t) \} = v_c(t) \sin(v_0 - \omega_0)t - v_s(t) \cos(v_0 - \omega_0)t.$$

Тоді для аналітичного сигналу маємо:

$$\zeta(t) = \xi^+(t) + \xi^-(t) + i[\eta^+(t) + \eta^-(t)] = \mu(t) e^{i(v_0 + \omega_0)t} + v(t) e^{i(v_0 - \omega_0)t}.$$

Теорема. Аналітичний сигнал є комплексним ПНВС, кореляційна функція якого визначається виразом:

$$b_{\zeta}(t, u) = \sum_{k=0, \pm 2} B_k^{(\zeta)}(u) e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$B_0^{(\zeta)}(u) = \left[\begin{array}{l} [r_p^c(u) + r_q^c(u)] \cos \omega_0 u + 2\tilde{r}_{pq}^c(u) \sin \omega_0 u - \\ -i \left[[r_p^{cs}(u) + r_q^{cs}(u)] \cos \omega_0 u + 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u) \sin \omega_0 u \right] e^{iv_0 u} \end{array} \right],$$

$$B_2^{(\zeta)}(u) = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} r_p^c(u) - r_q^c(u) - 2\tilde{r}_{pq}^c(u) \sin \omega_0 \tau - \\ -i \left[r_p^{cs}(u) - r_q^{cs}(u) + 2\tilde{r}_{pq}^{cs}(u) \right] e^{i(v_0 + \omega_0)u} \end{array} \right].$$

У розділі проаналізовано широкосмугову високочастотну модуляцію багатокomпонентного сигналу. Для цього аналізується сигнал у вигляді:

$$\xi(t) = \sum_{k=-L}^L \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} = \xi_0(t) + \sum_{k=1}^{2L} [\xi_k^c(t) \cos k\omega_0 t + \xi_k^s(t) \sin k\omega_0 t],$$

де $\xi_0(t)$ і $\xi_k(t) = \frac{1}{2} [\xi_k^c(t) - i\xi_k^s(t)]$ є взаємостаціонарними випадковими процесами.

Кореляційна функція сигналу дорівнює:

$$b_\xi(t, u) = \sum_{k, l=-L}^L R_{kl}^{(\xi)}(u) e^{i(l-k)\omega_0 t} e^{il\omega_0 u} = \sum_{r=-2L}^{2L} B_r^{(\xi)}(u) e^{ir\omega_0 t},$$

де

$$B_r^{(\xi)}(u) = \sum_{l \in M} R_{l-r, l}^{(\xi)}(u) e^{il\omega_0 u},$$

при цьому $R_{kl}^{(\xi)}(u) = E \bar{\xi}_k(t) \xi_l(t+u)$, $\xi_k(t) = \xi_k(t) - m_k$, $m_k = E \xi_k(t)$, $M = \{-L, \dots, k+L\}$ для $r \leq 0$ і $M = \{r-L, \dots, L\}$ для $r > 0$. Взаємокореляційні функції визначаються співвідношенням:

$$R_{kl}^{(\xi)}(u) = \frac{1}{4} \left[R_{\xi_k \xi_l}^c(u) + R_{\xi_k \xi_l}^s(u) - i \left[R_{\xi_k \xi_l}^{cs}(u) - R_{\xi_k \xi_l}^{sc}(u) \right] \right],$$

де

$$R_{\xi_k \xi_l}^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t) \overset{\circ}{\xi}_l^{c,s}(t+u), \quad R_{\xi_k \xi_l}^{cs}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k^c(t) \overset{\circ}{\xi}_l^s(t+u),$$

$$\overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t) = \xi_k^{c,s}(t) - m_k^{c,s}, \quad m_k^{c,s} = E \xi_k^{c,s}(t).$$

Теорема. Автокореляційні функції широкосмугового високочастотного модульованого сигналу і його перетворення Гільберта однакові, а їхні взаємокореляційні функції відрізняються лише знаком, нульові взаємокореляційні компоненти є непарними функціями часової затримки та визначаються виразом:

$$B_r^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[f_{\xi_0}(\omega) \sin \omega u + \right. \\ \left. + 2 \sum_{l=1}^L \left[\left[f_{\xi_l}^c(\omega) + f_{\xi_l}^s(\omega) \right] \sin \omega u \cos l\omega_0 u - 2\tilde{f}_{\xi_l}^{cs}(\omega) \cos \omega u \sin l\omega_0 u \right] \right] d\omega,$$

де

$$f_{\xi_0}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R_{\xi_0}(u) \cos \omega u du, \quad f_{\xi_l}^{c,s}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R_{\xi_l}^{c,s}(u) \cos \omega u du$$

Потужність стаціонарного фону визначається сумою спектральних густин потужності квадратур:

$$B_0^{(\zeta)}(0) = \int_{v_0 - \omega_m - L\omega_0}^{v_0 + \omega_m + L\omega_0} \left[2f_{\xi_0}(\omega) + \sum_{l=1}^L \left[f_{\xi_l}^c(\omega) + f_{\xi_l}^s(\omega) \right] \right] d\omega.$$

Коли необроблений сигнал фільтрується фільтром з прямокутною передаточною функцією і $[\omega_1, \omega_2] \subset [v_0 - \omega_m - L\omega_0, v_0 + \omega_m + L\omega_0]$, зменшується потужність стаціонарного фону. Величини амплітуд гармонік дисперсії зменшуються, якщо корельовані компоненти спектру сигналу не потрапляють в смугу пропускання фільтра.

У розділі проаналізовано вузькосмугову високочастотну модуляцію багатоконпонентного сигналу.

Теорема. *Випадкові процеси є взаємостаціонарними, якщо авто- та взаємкореляційні функції їхніх квадратур задовольняють рівності:*

$$\begin{aligned} R_{p_k p_l}^c(u) - R_{p_k p_l}^s(u) &= 0, \quad R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{p_k p_l}^{sc}(u) = 0, \\ R_{q_k q_l}^c(u) - R_{q_k q_l}^s(u) &= 0, \quad R_{q_k q_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{sc}(u) = 0, \\ R_{p_k q_l}^c(u) - R_{p_k q_l}^s(u) &= 0, \quad R_{p_k q_l}^{cs}(u) + R_{p_k q_l}^{sc}(u) = 0 \end{aligned}$$

Тоді авто- та взаємкореляційні функції визначаються як:

$$\begin{aligned} R_{kl}^c(u) &= \frac{1}{2} [R_{p_k p_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^s(u)] \cos v_0 u + \frac{1}{2} [R_{p_k p_l}^{cs}(u) - R_{p_k p_l}^{sc}(u)] \sin v_0 u, \\ R_{kl}^s(u) &= \frac{1}{2} [R_{q_k q_l}^c(u) + R_{q_k q_l}^s(u)] \cos v_0 u + \frac{1}{2} [R_{q_k q_l}^{cs}(u) - R_{q_k q_l}^{sc}(u)] \sin v_0 u, \\ R_{kl}^{cs}(u) &= \frac{1}{2} [R_{p_k q_l}^c(u) + R_{p_k q_l}^s(u)] \cos v_0 u + \frac{1}{2} [R_{p_k q_l}^{cs}(u) - R_{p_k q_l}^{sc}(u)] \sin v_0 u. \end{aligned}$$

Кожну складову багатоконпонентного сигналу можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} \xi_k^c(t) \cos k\omega_0 t + \xi_k^s(t) \sin k\omega_0 t &= \mu_k^c(t) \cos(v_0 + k\omega_0)t + \mu_k^s(t) \sin(v_0 + k\omega_0)t + \\ &+ v_k^c(t) \cos(v_0 - k\omega_0)t + v_k^s(t) \sin(v_0 - k\omega_0)t, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \mu_k^c(t) &= \frac{1}{2} [p_k^c(t) - q_k^s(t)], \quad \mu_k^s(t) = \frac{1}{2} [p_k^s(t) + q_k^c(t)], \\ v_k^c(t) &= \frac{1}{2} [p_k^c(t) + q_k^s(t)], \quad v_k^s(t) = \frac{1}{2} [p_k^s(t) - q_k^c(t)]. \end{aligned}$$

Вводячи комплексні випадкові процеси

$$\mu_k(t) = \frac{1}{2} [\mu_k^c(t) - i\mu_k^s(t)], \quad \mu_{-k}(t) = \bar{\mu}_k(t), \quad v_k(t) = \frac{1}{2} [v_k^c(t) - iv_k^s(t)], \quad v_{-k}(t) = \bar{v}_k(t),$$

для представлення сигналу маємо:

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \sum_{k=1}^L [\xi_k^+(t) + \xi_k^-(t)],$$

де

$$\xi_k^+(t) = \mu_k(t) e^{i(v_0 + k\omega_0)t} + \bar{\mu}_k(t) e^{-i(v_0 + k\omega_0)t}, \quad \xi_k^-(t) = v_k(t) e^{i(v_0 - k\omega_0)t} + \bar{v}_k(t) e^{-i(v_0 - k\omega_0)t}.$$

Теорема. *Випадкові процеси є стаціонарними і взаємоперіодично нестаціонарними, їх авто- та взаємкореляційні функції визначаються за формулами:*

$$\begin{aligned} R_{\xi_k^+ \xi_l^+}(t, u) &= \frac{1}{4} \left[[R_{p_k p_l}^c(u) + R_{q_k q_l}^c(u) + R_{q_k p_l}^{cs}(u) + R_{p_k q_l}^{sc}(u)] \cos((l-k)\omega_0 t + (v_0 + l\omega_0)u) + \right. \\ &+ \left. [R_{p_k q_l}^c(u) - R_{q_k p_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{sc}(u)] \sin((l-k)\omega_0 t + (v_0 + l\omega_0)u) \right], \\ R_{\xi_k^- \xi_l^-}(t, u) &= \frac{1}{4} \left[[R_{p_k p_l}^c(u) + R_{q_k q_l}^c(u) + R_{p_k q_l}^{cs}(u) + R_{q_k p_l}^{sc}(u)] \cos((l-k)\omega_0 t + (v_0 - l\omega_0)u) + \right. \\ &+ \left. [R_{q_k p_l}^c(u) - R_{p_k q_l}^c(u) + R_{p_k p_l}^{cs}(u) + R_{q_k q_l}^{sc}(u)] \sin((k-l)\omega_0 t + (v_0 - l\omega_0)u) \right], \end{aligned}$$

$$R_{\xi_k^+ \xi_l^-}^{\xi_l^-} (t, u) = \frac{1}{4} \left[\left[R_{p_k p_l}^c (u) - R_{q_k q_l}^c (u) + R_{p_k q_l}^{cs} (u) + R_{q_k p_l}^{cs} (u) \right] \cos((l+k)\omega_0 t - (v_0 - l\omega_0)u) + \right. \\ \left. + \left[R_{p_k q_l}^c (u) + R_{q_k p_l}^c (u) - R_{p_k p_l}^{cs} (u) - R_{q_k q_l}^{sc} (u) \right] \sin((l+k)\omega_0 t - (v_0 - l\omega_0)u) \right],$$

$$R_{\xi_k^- \xi_l^+}^{\xi_l^+} (t, u) = \frac{1}{4} \left[\left[R_{p_k p_l}^c (u) - R_{q_k q_l}^c (u) - R_{p_k q_l}^{cs} (u) - R_{q_k p_l}^{cs} (u) \right] \cos((l+k)\omega_0 t + (v_0 + l\omega_0)u) + \right. \\ \left. + \left[R_{p_k q_l}^c (u) + R_{q_k p_l}^c (u) + R_{p_k p_l}^{cs} (u) + R_{q_k q_l}^{sc} (u) \right] \sin((l+k)\omega_0 t + (v_0 + l\omega_0)u) \right],$$

$$i R_{\xi_k^+ \xi_l^-}^{\xi_l^-} (t, u) = R_{\xi_l^- \xi_k^+}^{\xi_k^+} (t + u, -u).$$

Теорема. Кореляційні компоненти сигналу та його перетворення Гільберта однакові. Взаємкореляційні компоненти $B_r^{(\xi\eta)}(\tau)$ і $B_r^{(\eta\xi)}(\tau)$ відрізняються лише знаком і визначаються за формулою:

$$B_r^{(\xi\eta)}(u) = -B_r^{(\eta\xi)}(u) = \sum_{l \in M} R_{l-r, l}^{(\xi\eta)}(u) e^{i\omega_0 u},$$

де

$$R_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{4} \left[\left[R_{p_k p_l}^c (u) + R_{q_k q_l}^c (u) \right] \sin v_0 u - \left[R_{p_k p_l}^{cs} (u) + R_{q_k q_l}^{cs} (u) \right] \cos v_0 u + \right. \\ \left. + i \left[\left[R_{p_k q_l}^{cs} (u) + R_{q_k q_l}^{sc} (u) \right] \cos v_0 u - \left[R_{p_k q_l}^c (u) - R_{q_k p_l}^c (u) \right] \sin v_0 u \right] \right],$$

$$i R_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = H \{ R_{kl}^{(\xi)}(u) \}.$$

Аналітичний сигнал для багатоконпонентного сигналу має вигляд:

$$\zeta(t) = \zeta_0(t) + \sum_{k=1}^L \left[\mu_k(t) e^{i(v_0 + k\omega_0)t} + \nu_k(t) e^{i(v_0 - k\omega_0)t} \right]$$

Його кореляційні компоненти визначаються виразом:

$$B_r^{(\zeta)}(u) = 2 \left[B_r^{(\xi)}(u) + i B_r^{(\xi\eta)}(u) \right] = \sum_{l \in M} R_{l-r, l}^{(\zeta)}(u) e^{il\omega_0 u},$$

де

$$R_{kl}^{(\zeta)}(u) = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} R_{p_k p_l}^c (u) + R_{q_k q_l}^c (u) - R_{p_k q_l}^{cs} (u) + R_{q_k p_l}^{cs} (u) - \\ - i \left[R_{p_k q_l}^c (u) - R_{q_k p_l}^c (u) + R_{p_k p_l}^{cs} (u) + R_{q_k q_l}^{sc} (u) \right] \end{array} \right] e^{iv_0 u}$$

Величина дисперсії аналітичного сигналу рівна подвоєній величині дисперсії сигналу:

$$b_{\zeta}(t, 0) = 2b_{\xi}(t, 0) = 2B_0^{(\zeta)}(0) + 2 \sum_{r=1}^{2L} \left[C_r^{(\xi)}(0) \cos r\omega_0 t + S_r^{(\xi)}(0) \sin r\omega_0 t \right].$$

Зміни дисперсії у часі спостерігаються на стаціонарному фоні, при цьому сума потужності квадратур задає величину фону. Амплітуда кожної гармоніки задається величиною кореляції квадратур, котрі повністю характеризуються кореляційними компонентами. У розділі проведено симуляцію періодично нестаціонарних випадкових сигналів та проаналізовано їх властивості.

У шостому розділі наведено результати обробки реальних діагностичних сигналів з використанням запропонованої моделі ПНВС. Наведено покроковий алгоритм ПНВС-аналізу діагностичного сигналу.

Наведено результати обробки та аналізу сигналу віброприскорення підшипникового вузла декантера (рис. 1а). Наведено оцінки кореляційної функції сигналу (рис. 1б), оцінка спектральної густини сигналу у стаціонарному наближенні (рис. 2а) та залежність квадратичного функціоналу від пробної частоти (рис. 2б), оцінки функції математичного сподівання (рис. 3а) та її амплітудного спектру (рис. 3б), оцінки

кореляційної функції (рис. 4а) та спектральної густини потужності стохастичної складової сигналу (рис. 4б), оцінка функції дисперсії (рис. 5а) та її амплітудний спектр (рис. 5б). Досліджено структуру взаємних кореляцій модулюючих складових на основі аналізу 19 спектральних компонент, побудовано матрицю (19x19) кореляцій (рис. 6) та матрицю нормалізованих коефіцієнтів кореляцій. У табл. 1 наведені амплітуди гармонік дисперсії та величини індикатора нестационарності для різних величин смуги пропускання сигналу.

Визначено індикатор нестационарності сигналу як оцінку ступеня розвитку дефекту. Показано, що кореляційні зв'язки між спектральними компонентами з різними частотами зникають залежно від різниці між номерами їх порядків. Показано, що вибір смуги обробки ПНВС слід вести на основі величини нормованого коефіцієнта кореляції між спектральними компонентами, що знаходяться на протилежних краях смуги пропускання. Проведено обробку цього ж сигналу методом “квадрату огинаючої” визначаючи “інформативну смугу частот” на основі спектрального ексцесу. Показано, що отримані методом “квадрату огинаючої” оцінки суттєво залежать від розміру реалізації сигналу, отже не є слушними.

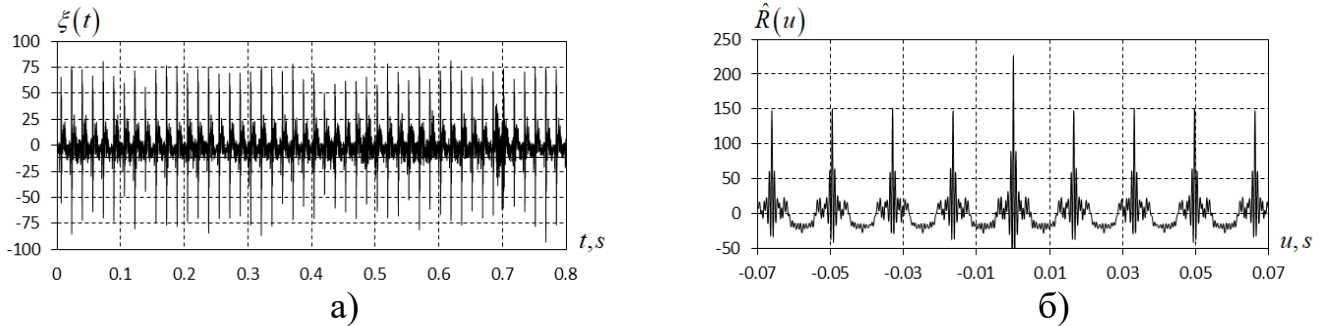


Рис. 1. Фрагмент реалізації сигналу віброприскорення (а) та оцінка його кореляційної функції (б)

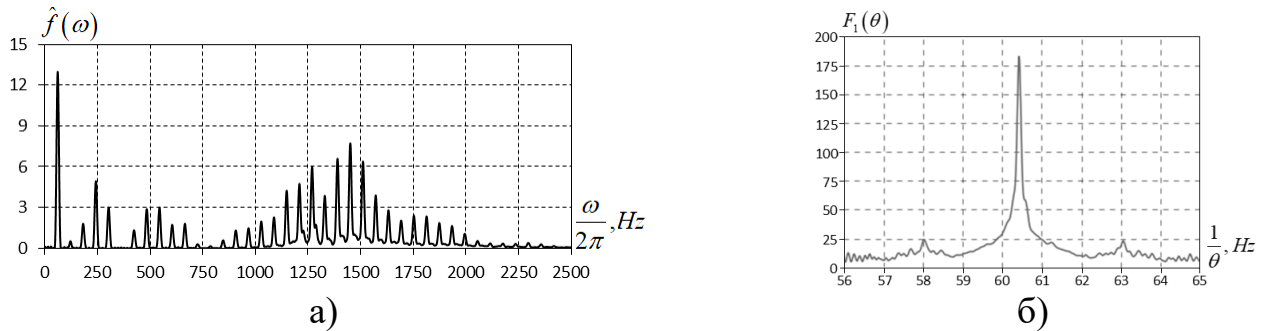


Рис. 2. Оцінка спектральної густини сигналу у стаціонарному наближенні (а) та залежність квадратичного функціоналу від пробної частоти (б)

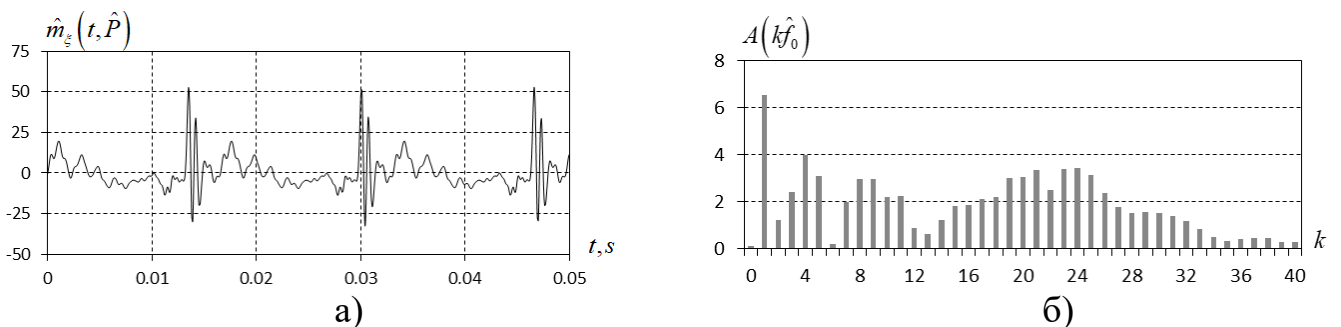


Рис. 3. Оцінки функції математичного сподівання(а) та її амплітудного спектру (б)

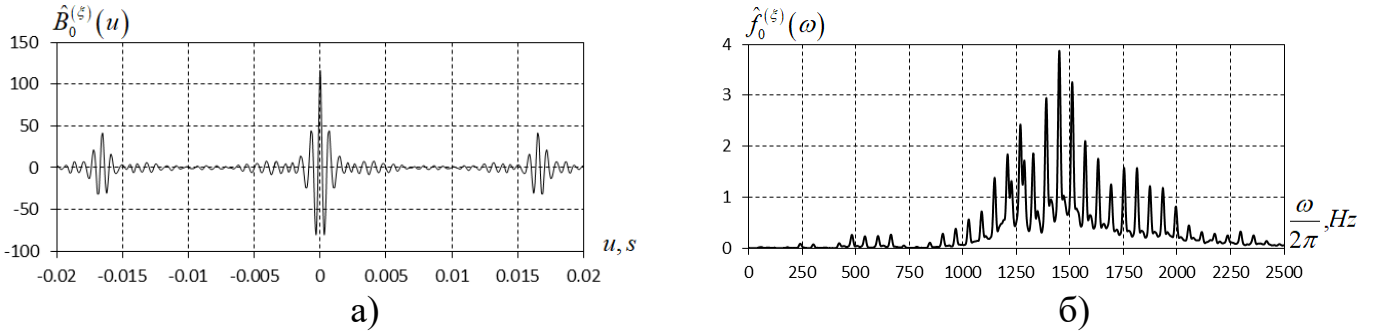


Рис. 4. Оцінки кореляційної функції(а) та спектральної густини потужності стохастичної складової сигналу (б)

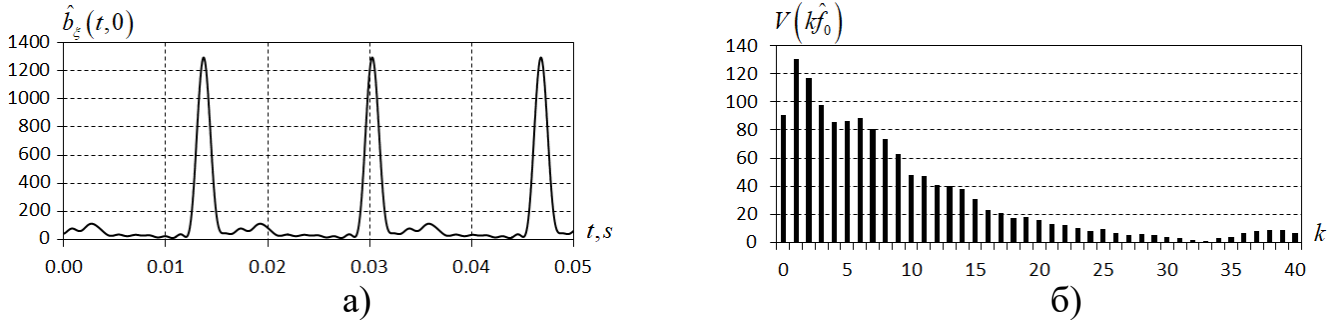


Рис.5 . Оцінка функції дисперсії (а) та її амплітудний спектр (б)

Таблиця 1. Амплітуди гармонік дисперсії та величина індикатора нестационарності для різних величин смуги пропускання сигналу

Амплітуда	Ширина смуги пропускання (число гармонік дисперсії)						
	$3\hat{f}_0$	$5\hat{f}_0$	$7\hat{f}_0$	$9\hat{f}_0$	$11\hat{f}_0$	$15\hat{f}_0$	$19\hat{f}_0$
S_0	30.00	72.95	57.75	69.69	78.30	90.08	97.92
S_1	17.12	29.76	40,19	48,485	56,24	68,2	76,025
S_2	7.84	21.88	33,095	41,84	51,2	64,39	72,9
S_3		13.58	29,09	41,37	50,095	63,055	72,22
S_4		4.88	16,67	28,09	38,715	52,345	61,76
S_5			8,895	19,545	31,44	47,49	57,28
S_6			5,085	14,57	24,77	42,625	53,41
S_7				7,75	15,39	32,4	44,475
S_8				3,72	11,41	25,94	39,26
S_9					6,9	19,14	32,015
S_{10}					3,66	14,125	24,41
S_{11}						10,34	19,235
S_{12}						6,47	14,76
S_{13}						3,615	6,42
S_{14}						1,545	7,675
S_{15}							5,07
S_{16}							3,2
S_{17}							1,71
S_{18}							0,64
I	0.83	1.63	2.30	2.95	3.70	5.01	6.11

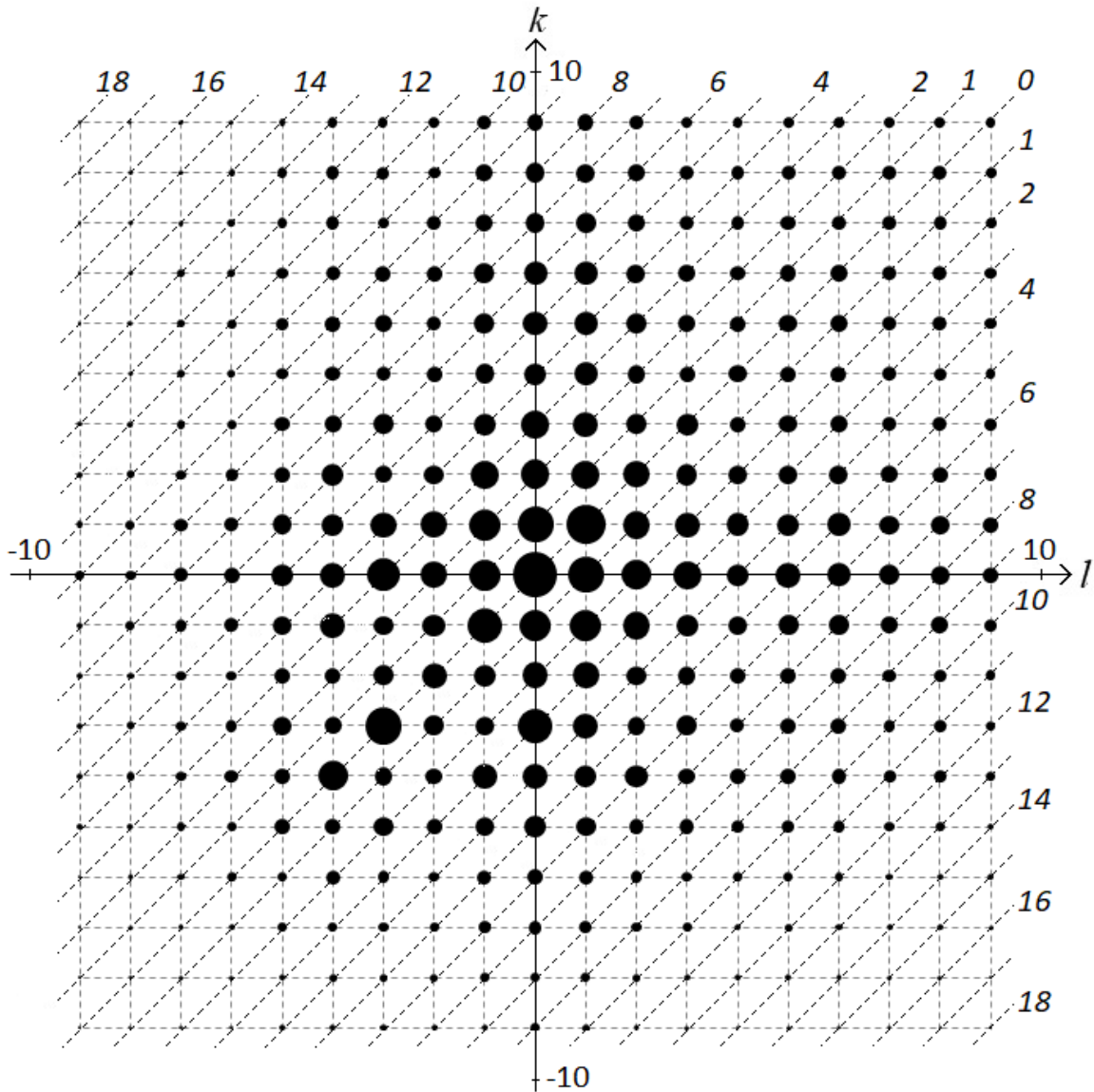


Рис. 6. Карта кореляцій $\hat{R}_{kl}^{(\mu)}(0)$ для сигналу з 19 компонент

Наведено результати застосування моделі ПНВС для аналізу експериментальних даних, отриманих Case Western Reserve University, що використовуються у якості неформальної бази сигналів для тестування методик обробки та виявлення дефектів у вібраційних сигналах. Виконано детальний аналіз сигналів для підшипника кочення з дефектами розміром 0,18 мм (рис. 7а) і 0,36 мм (рис. 10а) на зовнішньому кільці. Визначено базові частоти сигналу, розділено регулярну та стохастичну складові, отримано оцінки кореляційних функцій (рис. 7б) і (рис. 10б), кореляційних компонент вищих порядків. Наведені оцінки функції математичного сподівання сигналу та його амплітудний спектр для сигналу 137 (рис. 8) і для сигналу 237 (рис. 11). Наведені оцінки дисперсії сигналу та його амплітудний спектр для сигналу 137 (рис. 9) і для сигналу 237 (рис. 12). Визначено величини індикаторів нестационарності за різних величин дефекту, показано можливість оцінити ступінь розвитку дефекту. Наведено також результати обробки сигналів, котрі класифікуються в базі як такі, у яких кращі сучасні методи обробки не дозволяють виявити сигнатури дефектів. Показано, що застосування запропонованої моделі і методики обробки дозволяє виявити у цих сигналах ознаки дефектів і розрахувати величини відповідних індикаторів.

Аналіз вібрації підшипника кочення з пошкодженим зовнішнім кільцем за різних величин пошкодження 0,18 мм і 0,36 мм (набори даних 133 і 237 з бази Case Western Reserve University).

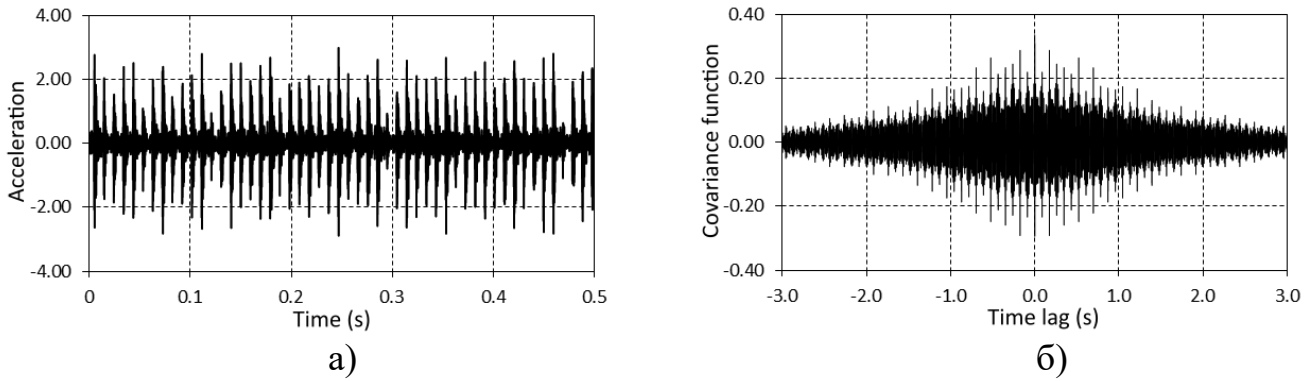


Рис. 7. Фрагмент реалізації вібраційного сигналу 137 (а)
та оцінка його кореляційної функції (б)

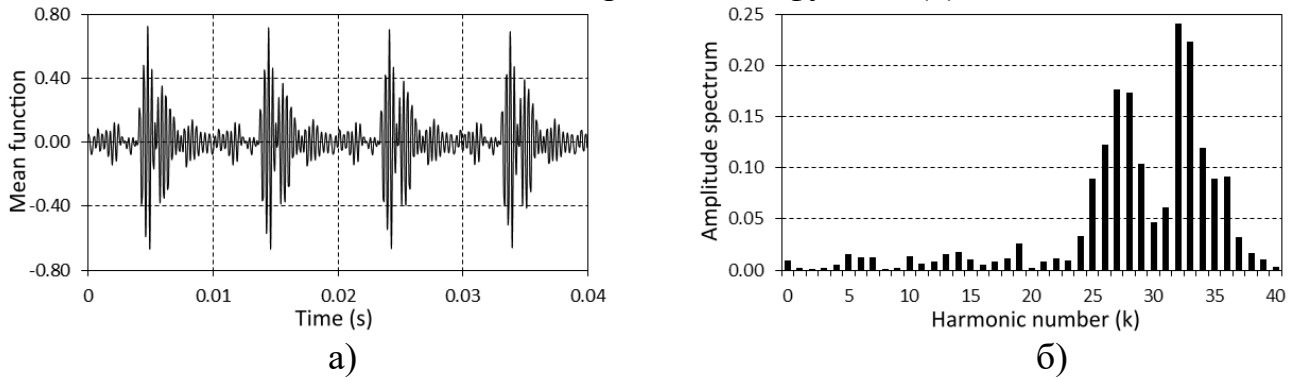


Рис. 8. Оцінка функції математичного сподівання сигналу 137 (а)
та її амплітудний спектр (б)

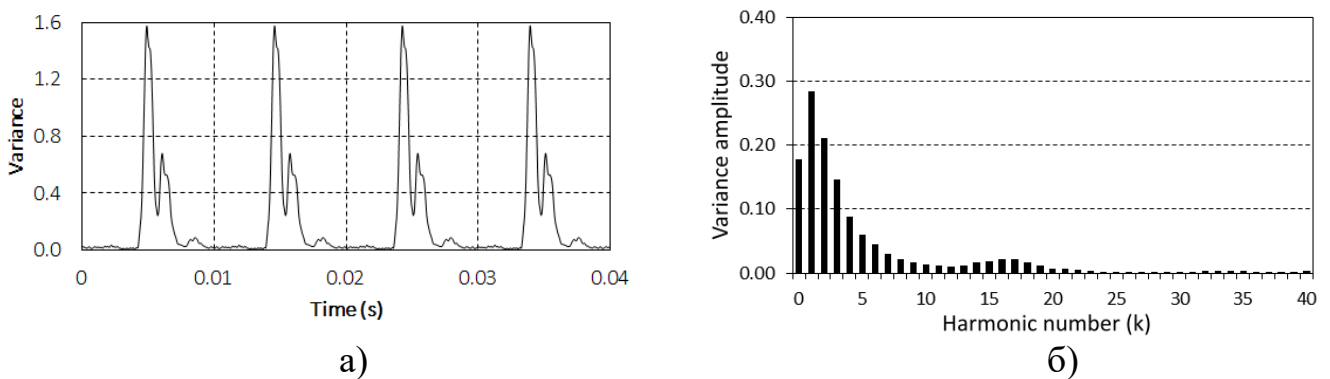


Рис. 9. Оцінка дисперсії сигналу 137 (а) та її амплітудний спектр (б)

Оцінка індикатора нестационарності сигналу 137 на базі 11 перших членів амплітудного спектру дисперсії складає $I_1 = \sum_{k=1}^{11} \hat{V}_k^{(1)}(\hat{f}_0) / \hat{B}_0^{(1)}(0) = 7.24$.

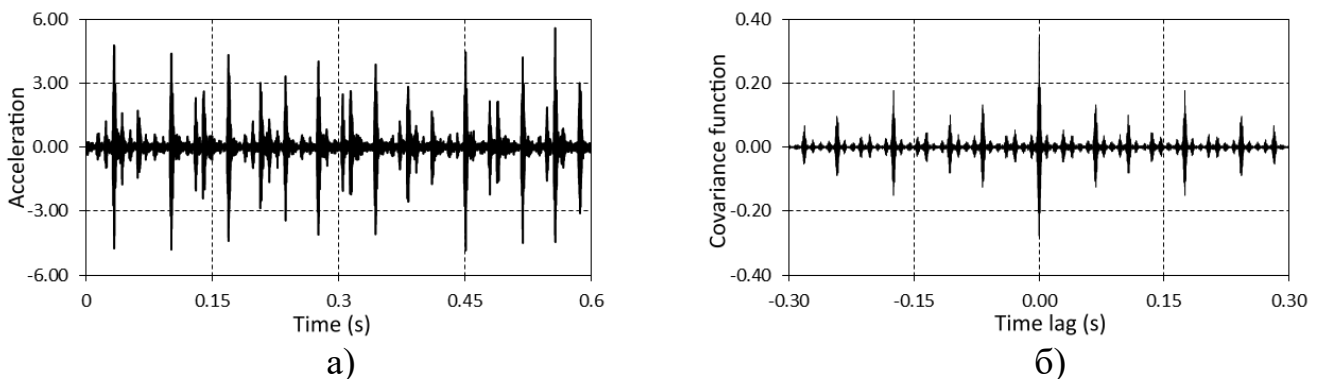
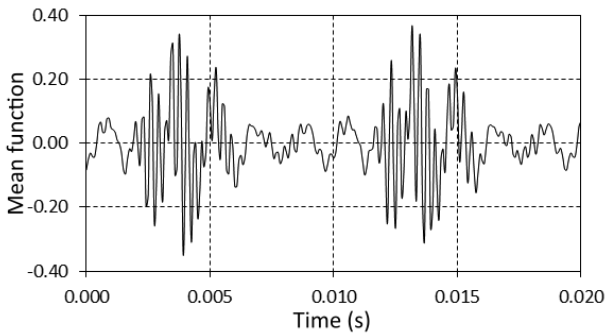
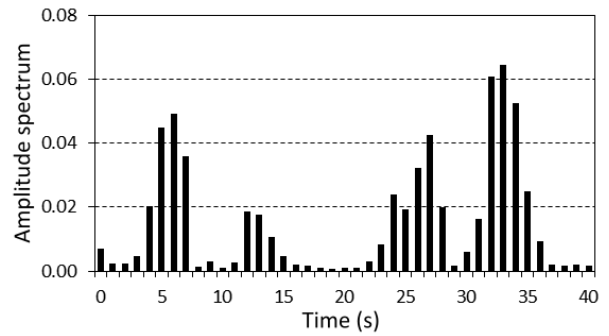


Рис. 10. Фрагмент реалізації вібраційного сигналу 237 (а)
та оцінка його кореляційної функції (б)

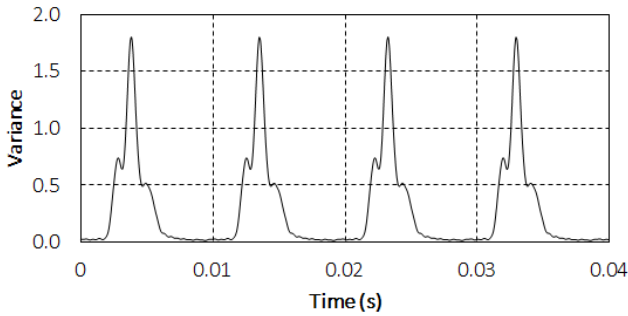


а)

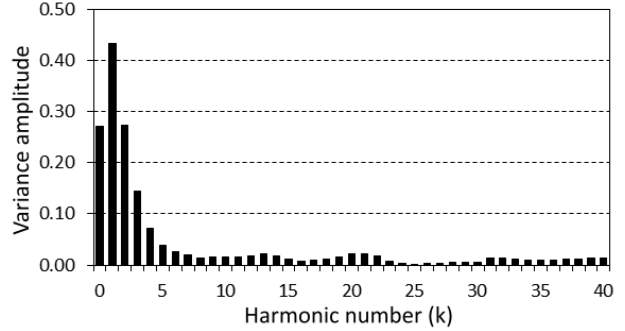


б)

Рис. 11. Фрагмент реалізації вібраційного сигналу 237 (а)
та оцінка його кореляційної функції (б)



а)

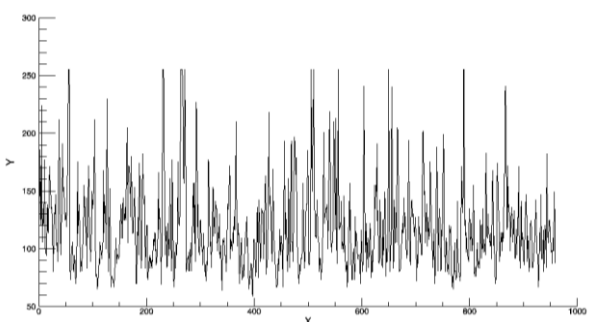


б)

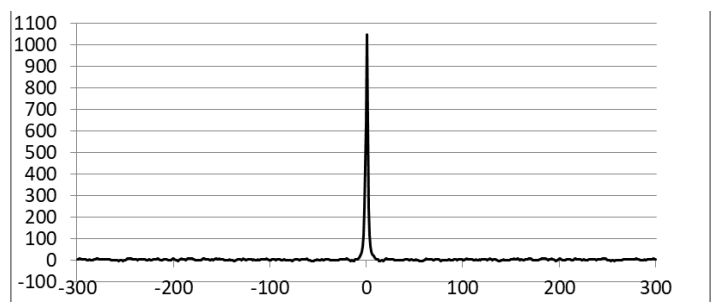
Рис. 12. Оцінка дисперсії сигналу 237 (а) та її амплітудний спектр (б)

Оскільки усереднена за часом потужність стохастичної складової зростає зі зростанням несправності, ми можемо врахувати цей приріст $\Delta B_0(0) = B_0^{(2)}(0) - B_0^{(1)}(0)$, формуючи другий індикатор розвитку дефекту $I_2 = \left[\Delta B_0(0) + \sum_{k=1}^{11} V_k(\hat{f}_0) \right] / B_0^{(1)}(0) = 8,08$. Цей індикатор демонструє виокучу чутливість до зміни розміру дефекту елемента підшипника.

Наведено результати застосування моделі ПНВС для раннього виявлення дефекту (тріщини) у матеріалі Д16Т шляхом аналізу оптичного спекл-сигналу зображень (рис. 13а) поверхні зразка при статичному навантаженні, наведена його кореляційна функція (рис. 13б) Залежність координат вершини тріщини (дефекту) від величини навантаження зразка по координаті X (рис. 14а) та Y (рис. 14б). Показано ефективність запропонованої моделі та методики обробки оптичного діагностичного ПНВС для системи з статичним навантаженням. Наведено карти кореляцій у просторі сигналу та визначено на основі цих даних величини індикаторів нестационарності за різної величини навантаження зразка (табл. 2), (рис. 15).

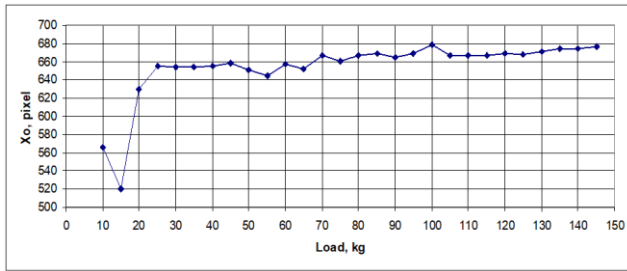


а)

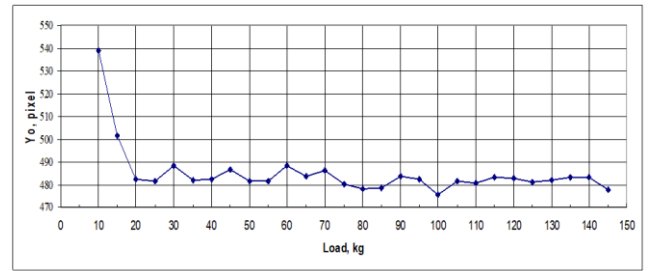


б)

Рис. 13. Фрагмент спекл-сигналу (а) та оцінка кореляційної функції (б)



а)

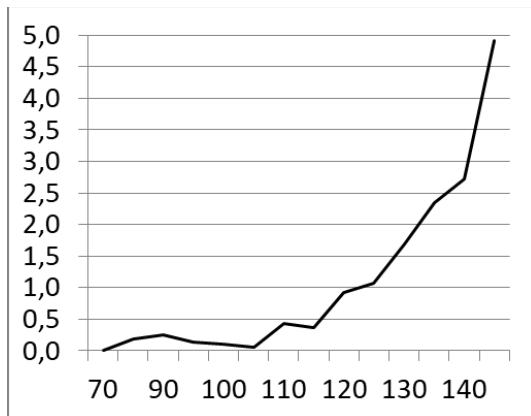


б)

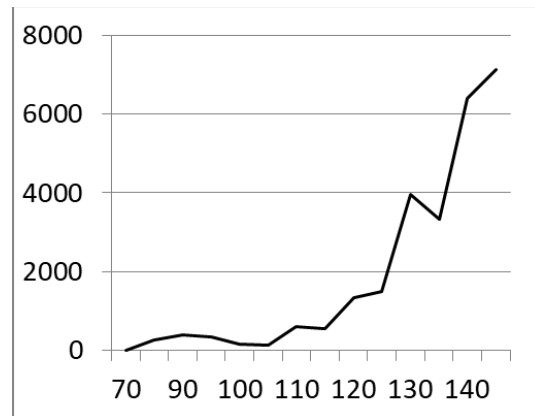
Рис. 14. Залежність координат вершини тріщини від величини навантаження зразка по координаті X (а) та Y (б)

Таблиця 2. Параметри нестационарності ПНВС спекл-сигналу.

Навантаження кГс	70	75	85	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145
Сума компонент вищих порядків	0,00038	0,18681	0,25239	0,13683	0,11182	0,0602	0,43792	0,36137	0,92497	1,07197	1,68733	2,34792	2,72554	4,91633
Середній фон (нульова складова)	0,00070	0,00071	0,00065	0,00039	0,00073	0,00046	0,000725	0,00066	0,00070	0,00072	0,00043	0,00070	0,00043	0,00069
Сигнал/фон (I_1)	0,5	263,5	389,9	350,2	152,7	130,1	612,7	550,6	1330,0	1495,8	3972,2	3337,7	6407,7	7129,0



а)



б)

Рис. 15. Залежність параметрів нестационарності від величини навантаження: сума складових вищих порядків (а) величина індикатора нестационарності I_1 (б).

Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів на основі стандартного методу оцінювання тріщиностійкості матеріалу за стандартом ISO E-399. Показано можливість виявлення та оцінювання ступеня розвитку дефекту за величини навантаження вдвічі меншого ніж передбачено стандартом. Продемонстровано високу чутливість індикаторів ступеня розвитку дефекту та високе (≥ 10) відношення сигнал/шум при визначенні кореляційних складових вищих порядків.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено важливу науково-прикладну проблему, котра полягає у розробці методів статистичного аналізу сигналів вібрацій пошкоджених механізмів на основі математичних моделей багатокомпонентних нестационарних випадкових процесів зі стохастичною амплітудно-фазовою модуляцією несучих гармонік і з використанням перетворення Гільберта досліджено їх кореляційно-спектральну структуру, що дає можливість встановлювати типи дефектів у механізмах, їх локалізацію та оцінювати ступінь розвитку.

1. Встановлено, що ранню стадію розвитку дефекту у нелінійній динамічній системі слід розглядати як нестационарний випадковий процес, що є результатом складної взаємодії періодичних, квазіперіодичних і стохастичних процесів та супроводжується появою прихованих періодичностей і проявляється при діагностуванні як періодично нестационарний випадковий сигнал. Означення ранньої стадії розвитку дефекту дало можливість сформулювати вимоги до побудови моделі сигналу та розробки методів його обробки.

2. Встановлено, що періодичні нестационарності другого порядку (приховані періодичності) є результатом взаємних кореляцій вищих порядків між модулюючими процесами ПНВС. Проведений порівняльний аналіз когерентних та компонентних методів виявлення прихованих періодичностей, що дозволило сформулювати підхід до їх пошуку та проведення аналізу кореляційно-спектральної структури ПНВС.

3. Проведено теоретичні дослідження, які показали слушність оцінок методами ПНВС функцій математичного сподівання, кореляційної функції та їх коефіцієнтів Фур'є. Встановлено, що частотний діапазон, в якому миттєва спектральна густина ПНВС змінюється за часом, визначається косинусними перетвореннями від косинусних і синусних кореляційних компонентів, що дозволило сформулювати вимоги до методу визначення періоду прихованої періодичності.

4. Показано, що визначення величини періоду нестационарності дає змогу обчислити весь комплекс характеристик першого і другого порядків ПНВС і тим самим повно описати структуру діагностичного сигналу, детально охарактеризувати властивості дефекту, визначити його параметри, а також встановити критерії оцінювання ступеня розвитку дефекту.

5. Розвинуто підхід до аналізу ПНВС з широкосмуговою, високочастотною, та амплітудно-фазовою модуляціями несучих гармонік на основі перетворення Гільберта. Встановлено, що кореляційна структура таких ПНВС і їх перетвореннями Гільберта є однаковими, тобто коефіцієнти Фур'є кореляційних функцій є однаковими, а коефіцієнти Фур'є взаємокореляційних функцій відрізняються знаком.

6. Досліджено властивості аналітичного сигналу для ПНВС і показано, що квадрат його модуля є ПНВП, і його потрібно аналізувати відповідними методами, тому його величину некоректно розглядати в якості квадрату огинаючої і аналізувати як детерміновану функцію.

7. Показано, що у випадку вузькосмугової високочастотної модуляції несучих гармонік ПНВС може бути представлений у вигляді суперпозиції складових, що описуються моделлю Райса, кожна з яких є стаціонарним випадковим процесом і одночасно вони є взаємоперіодично нестационарно зв'язаними випадковими процесами. Виявлені властивості призводять до періодичної нестационарності сигналу та відповідного аналітичного сигналу. Коефіцієнти Фур'є їх кореляційних функцій визначаються авто- та взаємокореляційними функціями квадратур.

8. Показано, що квадратури високочастотних компонент можуть бути виділені з використанням смугової фільтрації і перетворення Гільберта, і на основі отриманих часових рядів квадратур можуть бути обчислені їх авто- та взаємкореляції. Побудова карт кореляцій та аналіз їх структури, можуть бути використані для розділення та ідентифікації джерел сигналу, локалізації дефекту та визначення його типу. Запропоновано індикатори для оцінки ступеня розвитку дефекту, який визначається як відношення модуля взаємкореляцій вищих порядків модуляції до їх потужності.

9. Показано, що розподілений та локалізований дефекти проявляються в характері часових змін моментних функцій ПНВС. Часові зміни дисперсії, що описують потужність стохастичних вібрацій є симптоматичною ознакою для виявлення пошкоджень. Амплітудний спектр часових змін характеризує ступінь розвитку різних типів дефектів, для випадку розподіленого дефекту спектр вузький, а для випадку локалізованого дефекту є суттєво ширшим і може містити декілька десятків гармонік.

10. Показано, що вібрації для обох типів дефектів представляються суперпозицією вузькосмугових високочастотних компонент, які є стаціонарними і взаємно періодично нестационарними випадковими процесами. Виділені з використанням смугової фільтрації і перетворення Гільберта квадратури високочастотних компонент дозволили обчислити їх авто- та взаємкореляційні функції і побудувати карти кореляцій. Отримані карти є основою для вибору ширини смуги частот при обробці сигналу для виявлення та аналізу дефекту.

ПУБЛІКАЦІ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

Статті у журналах, що входять до наукометричних баз даних Scopus/Web of Science:

1. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Matsko I. Hilbert transform for covariance analysis of periodically nonstationary random signals with high-frequency modulation. *ISA Transactions*, 144, 452–481, 2024.

2. Javorskyj I., Matsko I., Yuzefovych R., Lychak O., Lys R. Methods of Hidden Periodicity Discovering for Gearbox Fault Detection. *Sensors*, 2021, 21, 6138.

3. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Trokhym G., Varyvoda M. Methods of periodically non-stationary random processes for vibrations monitoring of rolling bearing with damaged outer race. *Digital Signal Processing: A Review Journal*, 145, 2024, 104343.

4. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Slyepko R., Semenov P. Detection of distributed and localized faults in rotating machines using periodically non-stationary covariance analysis of vibrations. *Measurement Science and Technology*, 2023, 34, 065102.

5. Lychak O., Holyns'kiy I. Evaluation of random errors in Williams' series coefficients obtained with digital image correlation. *Measurement Science and Technology*, 2016, 27(3), 035203.

6. Lychak O., Holyns'kiy I. Improving the accuracy of derivation of the Williams' series parameters under mixed (I+II) mode loading by compensation of measurement bias in the stress field components data. *Measurement Science and Technology*, 2016, 27(12), 125203.

7. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Varyvoda M. Vibration analysis of the damaged bearing unit of the port crane lifting mechanism. *Materials Science*, 2024, 59(4), 395–404.

8. Sakharuk O., Muravs'kyi L., Holyns'kiy I., Lychak O. Determination of the field of local displacements by the digital speckle correlation method with adaptive segmentation of the images. *Materials Science*, 2014, 49(5), 660–666.

9. Lychak O., Holyns'kyi I. Estimation of the accuracy of determination of the Williams coefficients under the conditions of normal cleavage. *Materials Science*, 2013, 48(5), 664–670.

10. Voronyak T., Kmet A., Lychak O. Single-step phase-shifting speckle interferometry. *Materials Science*, 2007, 43(4), 554–567.

Статті у наукових фахових виданнях України:

11. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P. Methods and means of early vibration diagnostics of rotating components of mechanisms of quay container handlers. *The Paton Welding Journal*, 2022, 01, 48–58.

12. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Trokhym G., Varyvoda M., Semenov P. Diagnostics of gear pair damage using the methods of biperiodically correlated random processes. Part 2. Investigation of vibration signals of the wind power generator gearbox. *The Paton Welding Journal*, 2023, 4, 45–53.

13. Lychak O., Holyns'kyi I. Evaluation of stress field reconstruction errors near the crack tip of body under plain strain conditions. *Information extraction and processing*, 2014, 41(117), 63–69.

14. Яворський І., Юзефович Р., Личак О. Перетворення Гільберта багатокomпонентних періодично нестационарних випадкових сигналів. *Доповіді Національної академії наук України*, 2022, 1, 20–33.

15. Яворський І., Юзефович Р., Личак О. Аналіз високочастотної модуляції несучих гармонік періодично нестационарного випадкового сигналу. *Доповіді Національної академії наук України*, 2022, 2, 21–31.

16. Яворський І., Юзефович Р., Личак О. Стохастичні моделі прихованих періодичностей та ефективні методи їх виявлення. *Доповіді Національної академії наук України*, 2023, 6, 19–32.

17. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Слєпко Р., Варивода М., Семенов П. Діагностика пошкоджень зубчатих пар методами біперіодично корельованих випадкових процесів. Частина 1. Теоретичні аспекти проблеми. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2022, 4, 4–11.

18. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Трохим Г., Варивода М., Семенов П. Діагностика пошкоджень зубчатих пар методами біперіодично корельованих випадкових процесів. Частина 2. Дослідження вібраційних сигналів редуктора вітрогенератора. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2023, 1, 13–21.

19. Юзефович Р., Яворський Р., Личак О., Гнатишин В., Варивода М. Виділення та аналіз детермінованої складової вібрацій методом найменших квадратів. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2023, 2, 17–21.

20. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Комарницький Б., Хміль Р., Смірнова О. Дослідження кореляційної структури вібраційного сигналу підшипникових вузлів декантера. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2024, 2, 3–10.

21. Юзефович Р., Яворський І., Мацько І., Личак О., Трохим Г., Дзерин О., Стецько І. Пристрої для виявлення дефектів на ранніх стадіях їх зародження при визначенні технічного стану механізмів. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2020, 4, 8–16.

22. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Варивода М., Стецько І. Методи та засоби ранньої вібродіагностики підшипникових вузлів обертових механізмів. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2021, 2, 30–37.

23. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Семенов П. Методи та засоби ранньої вібродіагностики обертових вузлів механізмів причальних контейнерних перевантажувачів. *Технічна діагностика та неруйнівний контроль*, 2021, 4, 25–34.

24. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Trokhym G., Varyvoda M. Stochastic model of the gearbox pair vibration. *Information extraction and processing*, 2021, 49 (125), 26–31.

25. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Слєпко Р., Варивода М. Демодуляція нестационарного випадкового сигналу з використанням перетворення Гільберта. *Відбір і обробка інформації*, 2022, 50 (126), 26–33.

26. Яворський І., Юзефович Р., Личак О., Комарницький Б. Переваги моделі періодичного нестационарного випадкового процесу при обробці вібраційного сигналу. *Відбір і обробка інформації*, 2023, 51(127), 23–31.

27. Личак О., Глова З., Кметь А. Спектральні перетворення сигналів в різницевому спекл-інтерферометрі Ліндерця. *Відбір і обробка інформації*, 2004, 21 (97), 74–79.

28. Личак О., Глова З., Кметь А. Порівняльний аналіз методів виділення корисного сигналу в фазозсувних спекл-інтерферометрах. *Відбір і обробка інформації*, 2006, 25(101), 91–98.

29. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Khmil R. The covariance analysis of the periodically non-stationary random signal with narrow-band modulation of carrier harmonics. *Information Extraction and Processing*, 2024, 52(128), 19–26.

Патенти:

30. Личак О.В. Спосіб виявлення місць розміщення дефектів у матеріалі або місць руйнування матеріалу чи елемента конструкції при навантаженні (варіанти). Патент України на 20 років № 114116, опубл. 25.04.2017, бюл. № 8/2017.

31. Личак О.В. Спосіб виявлення місць розміщення дефектів у матеріалі або місць руйнування матеріалу чи елемента конструкції за механічного навантаження чи іншого виду руйнування матеріалу (варіанти). Патент України на 20 років № 121586, опубліковано 25.06.2020, бюл. № 12/2020.

32. Личак О.В. Спосіб підвищення точності визначення коефіцієнтів розкладу поля механічних напружень в околі вершини тріщини у степеневі ряди Вільямса. Патент України на корисну модель № 92126, опубліковано 11.08.2014, бюл. № 15/2014.

33. Личак О.В. Спосіб виявлення та визначення положення вершини наскрізної тріщини у матеріалі або конструкції. Патент України на корисну модель № 98606, опубліковано 27.04.2015, бюл. № 8/2015.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

34. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Matsko I., Semenov P. Evaluation of the mechanism damage using model of vibration signal as a periodically correlated random process. *Procedia Structural Integrity*, 2022, 36, 122–129.

35. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Kurapov P. Hilbert Transform for Analysis of Daily Changes of the Earth Magnetic Field // *2021 IEEE XII International Conference on Electronics and Information Technologies (ELIT)*. P. 181–185.

36. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P. Hilbert Transform of Multicomponent Narrow-band Periodically Non-stationary Random Signal // *Proceedings of XI International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, Deggendorf, Germany, ACIT–2021. P. 57–60.

37. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Trokhym G., Semenov P. Bi-periodically correlated random processes as a model for gear pair vibration // *First International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied Problems (ITTAР–2021)*, November 16–18, 2021, Ternopil, Ukraine. CEUR Workshop Proceeding, 2021, 3039, P. 47–54.

38. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Sliepko R., Semenov P. Hilbert transform for analysis of amplitude modulated wide-band random signals // *Proceedings of XII International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, Spišská Kapitula, Slovakia, 26-28 September 2022. P. 68–71.

39. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Sliepko R., Varyvoda M. Hilbert transform of periodically non-stationary random signals: narrow-band high frequency amplitude modulation // *Proceedings of 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology*, Kharkiv, Ukraine, 3–7 October 2022. P. 273–277.

40. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Sliepko R., Romanyshyn Yu. Model for analysis of high-frequency modulated random signals // *Proceedings of 13th International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, Wrocław, Poland, 21-23 September 2023. P. 96–99.

41. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Varyvoda M. Analysis of the periodically non-stationary structure for modulated vibration signal // *2023 IEEE 13th International Conference on Electronics and Information Technologies (ELIT)*, September 26-28, 2023. P. 252–256.

42. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Semenov P. Method of periodically non-stationary random signals demodulation with Hilbert transform // *3rd International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied Problems (ITTAP-2023)*, November 22-24, 2023, Ternopil, Ukraine and Opole, Poland. CEUR Workshop Proceeding, 2023. 3628, P. 548–553. (Scopus)

43. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Semenov P., Sliepko R. Demodulation of the simulated periodically non-stationary random signal with Hilbert transform // *CEUR Workshop Proceedings, 2nd International Workshop on Computer Information Technologies in Industry 4.0, CITI 2024*, 12–14 June 2024, Ternopil, Ukraine, 3742, P. 127–136. (Scopus)

44. Yuzefovych R., Javorskyj I., Lychak O., Torba Yu., Sbrodov Ye., Komarnytskyi B. Correlation matrix for analysis of the covariance and spectral structures of PNRP // *Proceedings of 14th International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, Ceske Budejovice, Czech Republic, 19-21 September 2024. P. 158–161.

45. Javorskyj I., Torba Yu., Yuzefovych R., Sbrodov Ye., Lychak O. Periodically non-stationary properties of vibrations for gas-turbine engine with unbalanced rotor // *VII International conference "Welding and related technologies"*, 7–10 October 2024, Ukraine: Abstracts of plenary and poster papers. Kyiv, International Association "Welding". P. 17.

46. Трохим Г.Р., Юзефович Р.М., Личак О.В., Варивода М.З., Бойко М.В., Лисенко О.М. Діагностування підшипників кочення методами ПКВП. *Праці ХХ Міжнародної науково-технічної конференції "Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта"*. Київ : Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 2019. С. 167–168.

47. Яворський І.М. Застосування кореляційного аналізу вібраційних сигналів для дослідження трибокорозії / І.М. Яворський, Р.Т. Слепко, Р.М. Юзефович, О.В. Личак // *Праці ХХ Міжнародної науково-технічної конференції "Приладобудування: стан і перспективи"*. Київ : Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 2021. С. 155–156.

48. Юзефович Р.М. Розроблення систем вібраційної діагностики обертових механізмів з використанням методів теорії періодично нестационарних випадкових процесів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, І.Г. Стецько // *Збірка тез чотирнадцятої міжнародної науково-практичної конференції "Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси"* (ІРТК-2021). Київ: Національний авіаційний університет, 2021. С. 228–229.

49. Встановлення технічного стану обладнання з використанням вібродіагностичних систем відбору та обробки вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, І.Г. Стецько, М.З. Варивода // *Праці XX Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2021. С. 146–147.

50. Система відбору вібраційних сигналів для діагностики обертових механізмів / Р.М. Юзефович, І.Г. Стецько, І.М. Яворський, О.В. Личак // *Збірка тез доповідей другої міжнародної конференції “Неруйнівний контроль та моніторинг технічного стану”*. Одеса, 2021. С. 43–44.

51. Юзефович Р.М. Підходи до побудови систем вібродіагностики / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, П.О. Семенов, О.В. Личак, І.Г. Стецько // *Збірка тез доповідей другої міжнародної конференції “Неруйнівний контроль та моніторинг технічного стану”*. Одеса, 2021. С. 44.

52. Дослідження спектральних властивостей вібраційного сигналу від елемента механізму з тріщиною / Р.М. Юзефович, І.М. Мацько, О.В. Личак, Г.Р. Трохим, І.М. Яворський // *Праці XXI Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2022. С. 191–193.

53. Юзефович Р.М. Дослідження технічного стану механізмів з використанням методів періодично корельованих випадкових процесів / Р.М. Юзефович, О.В. Личак, П.Р. Курапов, М.З. Варивода, І.М. Яворський // *Праці XXI Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2022. С. 196–198.

54. Дослідження процесів трибокорозії поверхні тіл обертання із застосуванням кореляційного аналізу вібраційних сигналів / О.В. Личак, Р.Т. Слєпко, І.М. Яворський, Р.М. Юзефович // *Праці XXI Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2022. С. 200–201.

55. Сучасні методи вібраційної діагностики обертових механізмів ґрунтовані на теорії періодично корельованих випадкових процесів / Р.М. Юзефович, О.В. Личак, І.М. Яворський, І.Г. Стецько // *Збірка тез п'ятнадцятої міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ІПРТК-2022)*. Київ: Національний авіаційний університет, 2022. С. 202–203.

56. Обробка вібраційних сигналів методами періодичних нестационарних випадкових процесів для виявлення дефектів підшипників / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, О.В. Личак, Г.Р. Трохим, І.М. Мацько // *Збірка тез міжнародної науково-практичної конференції “Міцність і довговічність сучасних матеріалів та конструкцій”* присвячена 70-ти річчю з дня народження член-кореспондента НАН України, проф. П. Яснія. Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2022. С. 219–221.

57. Діагностування механізмів на основі аналізу вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, О.В. Личак, І.М. Яворський, І.Г. Стецько, І.Я. Стецько // *Збірка тез міжнародної науково-практичної конференції “міцність і довговічність сучасних матеріалів та конструкцій”* присвячена 70-ти річчю з дня народження член-кореспондента НАН України, проф. П. Яснія. Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2022. С. 222–223

58. Модель стохастичної модуляції вібраційних сигналів для виявлення дефектів підшипників / Г. Трохим, О. Личак, Р. Юзефович, І. Яворський, Р. Слєпко // *Збірка тез*

міжнародної науково-практичної конференції “міцність і довговічність сучасних матеріалів та конструкцій” присвячена 70-ти річчю з дня народження член-кореспондента НАН України, проф. П. Яснія. Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2022. С. 224–225.

59. Застосування вібродіагностичних систем відбору та обробки вібраційних сигналів для визначення технічного стану промислового обладнання / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, Р.Т. Слепко, О.В. Личак, І.Г. Стецько, М.З. Варивода, Г.Р. Трохим // *Збірка тез конференції “Зварювання та технічна діагностика для відновлення економіки України”*. Київ: Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України, 2022. С. 22.

60. Періодично корельовані випадкові процеси як модель циклічних навантажень у механізмах та конструкціях / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, М.З. Варивода, Р.Т. Слепко // *Праці XXII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2023. С. 222–223.

61. Дослідження обертових механізмів без спеціальних фундаментів методами періодично корельованих випадкових процесів / Р. Юзефович, І. Яворський, О. Личак, В. Симоненко, Р. Слепко // *Праці XXII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2023. С. 262–263.

62. Застосування нестационарного підходу до аналізу вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, І.Й. Мацько // *Збірка тез шістнадцятої міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ПРТК-2023)*. Київ: Національний авіаційний університет, 2023. С. 302–304.

63. Застосування методів періодично корельованих випадкових процесів для аналізу вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, І.Й. Мацько, П.О. Семенов // *Матеріали 16-й міжнародного симпозіуму українських інженерів-механіків у Львові*. Львів: Національний Університет “Львівська Політехніка”, 2023. С. 124–125.

64. Аналіз вібраційних сигналів від тонкої пластини з тріщиною / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, О.В. Личак, І.Й. Мацько // *Матеріали XIII міжнародної науково-практичної конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем”*. Національний університет “Чернігівська політехніка”, 2023. Т. 1. С. 236.

65. Імовірнісна модель вібраційних сигналів у вигляді періодичного нестационарного випадкового процесу / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, Р.Т. Слепко, П.О. Семенов // *Збірник тез доповідей III Міжнародної науково-технічної конференції “Перспективи розвитку машинобудування та транспорту”*, 1-3 червня 2023 року. Вінниця: Вінницький національний технічний університет, 2023. С. 301–302.

66. Дослідження технічного стану авіаційних двигунів методами періодично нестационарних випадкових процесів / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, Ю.І. Торба, О.В. Личак, Є.В. Сбродов // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 236–237.

67. Триканальний портативний пристрій для відбору та обробки вібраційних сигналів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, І.Г. Стецько, О.В. Личак, І.Я. Стецько, М.З. Варивода // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 238–239.

68. Метадані при відборі та дослідженні вібраційних сигналів / Г.Р. Трохим, О.В. Личак, Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, В.С. Янішевський // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 244–245.

69. Дослідження структури вібраційних сигналів методами ПКВП у підшипниках підданих наводненню / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, Б.Р. Комарницький, О.В. Личак, Р.Т. Слепко // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 253–254.

70. Дослідження поширення вібрації в транспортній колісній машині / Г.Т. Черчик, О.В. Личак, Г.Р. Трохим, Р.М. Юзефович, І.М. Яворський // *Праці XXIII Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*. Київ: Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2024. С. 257.

71. Побудова сучасних систем вібраційної діагностики складних механізмів / Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, Б.Р. Комарницький, О.В. Личак // *Збірка тез сімнадцятої Міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ПРТК–2024)*. Київ: Національний авіаційний університет, 2024. С. 436–437.

72. Діагностування дефектів у механізмах портових кранів / І.М. Яворський, П.О. Семенов, Р.М. Юзефович, О.В. Личак // *Збірка тез сімнадцятої Міжнародної науково-практичної конференції “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ПРТК–2024)*. Київ: Національний авіаційний університет, 2024. С. 438–439.

73. Вібраційна діагностика обертових вузлів машинних комплексів / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, Б.Р. Комарницький, О.В. Личак, І.Й. Мацько // *Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем”*. Чернігів: Національний університет “Чернігівська політехніка”, 2024. С. 240.

74. Спосіб пониження вібраційного навантаження на опори конструкцій / Г.Т. Черчик, І.М. Яворський, О.В. Личак, Р.Т. Слепко, Р.М. Юзефович // *Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем”*. Чернігів: Національний університет “Чернігівська політехніка”, 2024. С. 241.

75. Переваги вібраційних методів діагностики механізмів порталних кранів / П.О. Семенов, І.М. Яворський, О.В. Личак, Р.М. Юзефович, Б.Р. Комарницький // *Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції “Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем”*. Чернігів: Національний університет “Чернігівська політехніка”, 2024. С. 242.

76. Спеціалізовані системи для задач вібраційної діагностики обертових механізмів / І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, О.В. Личак, І.Й. Мацько, Г.Р. Трохим, І.Г. Стецько // *Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції “Перспективи розвитку озброєння та військової техніки сухопутних військ”*. Львів: Національна академія сухопутних військ імені Гетьмана Петра Сагайдачного, 2024. С. 407–408.

77. Model of the diagnostic signals in the form of bi-periodically non-stationary random process / R.M. Yuzefovych, I.M. Javorskyj, O.V. Lychak, M.Z. Varyvoda // *Матеріали міжнародної наукової конференції “Математика та інформаційні технології”*, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28-30 вересня 2023 року. Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2023. С. 131–132.

Личак О.В. Математичне моделювання нестационарних випадкових сигналів для виявлення дефектів механізмів на початкових стадіях розвитку. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи, Спеціалізована вчена рада Д 58.082.02 Західноукраїнського національного університету Міністерства освіти і науки України, Тернопіль, 2025.

У дисертаційній роботі вирішено важливу науково-прикладну проблему розробки методів статистичного аналізу сигналів вібрацій пошкоджених механізмів на основі математичних моделей багатокомпонентних нестационарних випадкових процесів зі стохастичною амплітудно-фазовою модуляцією несучих гармонік і з використанням перетворення Гільберта досліджено їх кореляційно-спектральну структуру, що дає можливість встановлювати типи дефектів у механізмах, їх локалізацію та оцінювати ступінь розвитку. Сформульовано означення ранньої стадії розвитку дефекту як періодично нестационарного випадкового процесу що супроводжується появою прихованих коливань, котрі є періодично нестационарними випадковими сигналами (ПНВС). Розроблено теоретичні основи використання перетворення Гільберта для аналізу діагностичних ПНВС з широкосмуговою і вузькосмуговою високочастотними та амплітудно-фазовими модуляціями несучих. Обґрунтовано процедури обробки діагностичних сигналів. Проведена обробка реальних сигналів та описана їх кореляційна структура на основі побудованих карт кореляцій.

Ключові слова: періодично нестационарний випадковий сигнал, перетворення Гільберта, моделювання, аналітичний сигнал, кореляційний аналіз, вібрація, дефекти, діагностика, фільтрація.

Lychak O.V. Mathematical modeling of the non-stationary random signals for detecting defects in mechanisms at the initial stages of their development. – Qualifying research paper in the form of a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences in the specialty 01.05.02 – Mathematical Modeling and Computational Methods, Specialized Academic Council Д 58.082.02 of the West Ukrainian National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Ternopil, 2025.

In this dissertation an important scientific and applied problem, which consists in developing methods for statistical analysis of vibration signals of damaged mechanisms was resolved, based on mathematical models of multicomponent non-stationary random processes with stochastic amplitude-phase modulation of carrier harmonics and, using the Hilbert transform, their correlation-spectral structure is investigated, which makes it possible to establish the types of defects in mechanisms, their localization and assess the degree of development. The problem was solved by means of developing and implementing approach, based on methods of stochastic process theory, signal theory, methods of Fourier analysis, the small parameter method, and methods of computational mathematics. For the first time, the definition of the early stage of defect development as a periodically non-stationary random process is formulated. It is accompanied by the appearance of hidden oscillations in the system response, which are periodically non-stationary random signals (PNRS). It is established that second-order periodic non-stationarities (hidden periodicities) are result of higher-orders joint

correlations between the modulating processes of PNRS. A comparative analysis of coherent and component methods for detecting hidden periodicities is carried out. Theoretical basics for using of the Hilbert transform for the analysis of diagnostic PNRSs, with wideband and narrowband high-frequency and amplitude-phase modulations of carriers, are developed. It is shown that the analytical signal of PNRS is also PNRS. It is established that the use of known methods of “envelope” for the analysis of multicomponent PNRS is inappropriate, since the square of the modulus of the analytical signal, which is called the “square of the envelope”, is a random process, its moment functions change periodically with time. It is shown that stochastically amplitude-phase modulated oscillations of PNRS can be represented by a superposition of high-frequency components, which are stationary and jointly periodically non-stationary joined random processes. Such a representation reduces the study of signal properties to the analysis of the correlation components of higher orders of quadratures of high-frequency carriers. Theoretical studies have been performed, showing the validity of estimates by PNRS methods of the functions of mathematical expectation, correlation function and their Fourier coefficients. It has been established, that the frequency range in which the instantaneous spectral density of PNRS signal changes over time is determined by cosine transformations from cosine and sine correlation components. It has been shown that filtering of the PNRS signal should be based on estimates of joint correlations of high-frequency components of higher orders, which increase the efficiency of diagnostics. It is shown that the use of bandpass filtering and the Hilbert transform for the extraction and analysis of correlations of quadratures of high-frequency harmonics allows building a correlation map that has characteristic features for various defects. Diagnostic signal processing procedures have been substantiated, which make it possible to detect and describe within the framework of the moment functions of the first and second orders of the PNVP their structure, including the structure of high-frequency, broadband and amplitude-phase modulations. The developed approach is applied to the analysis of signals from the distributed and local defects in mechanisms. Within the framework of the moment functions of the first and second orders, the main patterns and differences between the signals of such defects are described. Real signals were processed. Their correlation structure is described based on the constructed correlation maps. It is established that the high-frequency modulation of the carrier harmonics of the PNRS model of bearing vibrations is narrow-band and can be described using to Rice's equations. It is shown that the correlations of the quadratures of modulations are slowly decaying oscillatory functions of the lag, which causes a similar shape of the correlation components and decay interval of the correlation components is much larger than the period of non-stationarity. The main results of the dissertation were implemented at list of governmental and private enterprises.

Key words: periodically non-stationary random signal, Hilbert transform, modeling, analytical signal, correlation analysis, vibration, defects, diagnostics, filtration.